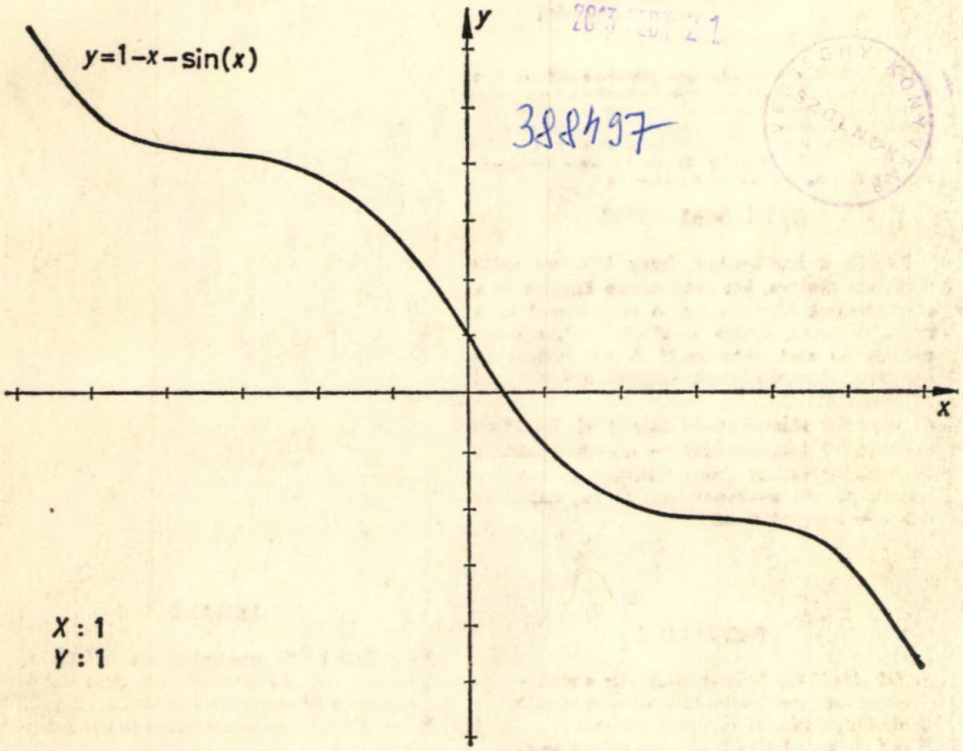
A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



388497

1990. XXXVI. évfolyam 1 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
URBÁN JÁNOS

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG:
ÁCS PÁL, ELŐD ISTVÁNNÉ, HÓDI ENDRE, DR. KOLLER LÁSZLÓNÉ, KOVÁCS ZOLTÁN, LAJOS JÓZSEFNÉ, NÉMETHY KATALIN, PÁLMAY LÓRÁNT, POGÁTS FERENC, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ, SZENDREI JULIANNA, SZTANÓ TAMÁSNÉ

Szerkesztőség: 1087 Budapest, Berzsenyi utca 6.
Telefon: 1141-009

90-198 — Szegedi Nyomda
F. v.: Surányi Tibor igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a HELIR Bp. 1900 Lehel utca 10/a. közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a Postabank Rt 219-98636, 021-02799 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 47,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 12,— Ft.

ISSN 0461—3902

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Szíveskedjenek közölni a következő adatokat is:
a) személyi számukat, *b)* asszonyok leánykori nevüket, *c)* lakáscímüket — irányítószámmal, *d)* foglalkozásukat (beosztásukat), *e)* munkahelyük pontos megnevezését, *f)* munkahelyük címét — irányítószámmal.

TARTALOM

Szilák Aladárné: Számítástechnika a szakosított matematika-tanterv alapján tanuló általános iskolai 6. osztályokban..... 1
Freud Róbert: Lineáris algebra a kombinatorikában 4
Máté László: 26 feladat lineáris algebrából 13
Poronyi Gábor: Egyenletek közelítő megoldása 21
ÖTLETSAROK
Kurucz Lászlóné: Módszertani javaslat a mértékegységváltás tanítására ..... III.

СОДЕРЖАНИЕ

Силак Аладарне: Вычислительная техника в 6-ых классах начальной школы, изучающих математику по специальной программе 1
Фрайд Роберт: Линейная алгебра в комбинаторике 4
Матэ Ласло: 26 задач из линейной алгебры 13
Пороии Габор: Приблизительное решение уравнений 21
УГОЛОК ИДЕЙ .....
Куруц Ласлоне: Методическое предложение преподавать переключение десятериков ..... III.

INHALT

Frau Szilák: Computertechnik in der 6. Klasse der Volksschule mit dem spezielisierten Matematiklehrplan 1
Róbert Freud: Lineare Algebra in der Kombinatorik 4
László Máté: 26 Aufgaben aus der Linearen Algebra 13
Gábor Poronyi: Approximative Lösung der Gleichungen 21
IDEENECKE .....
Frau Kurucz: Methodenvorschlag für das Unterrichten des Maßeinheitswechsel... III.

SZILÁK ALADÁRNÉ
főiskolai adjunktus
Eger, Ho Si Minh Tanárképző Főiskola

Számítástechnika a szakosított matematika-tanterv alapján tanuló általános iskolai 6. osztályokban

(Egy kísérlet tapasztalatai)

„A Matematika Tanítása" 1987/6. számában dr. Simonovits Miklós a számítástechnika középiskolai oktatásával kapcsolatos kísérletekről ír. A kísérletek tapasztalatai alapján olyan számítástechnikai ismeretek tanítását javasolja a szerző a középiskolában (elsősorban gimnáziumban), amellyel az általános számítástechnikai kultúra átadása a cél.

Ha a fenti célt már az általános iskolában megalapozzuk, a középiskolában minden valószínűség szerint eredményesebben dolgozhatunk ezen a területen.

A számítástechnikai ismeretek tanítására az általános iskolában is többféle lehetőség van; pl. szakköri foglalkozások, fakultáció, tanóra (elsősorban matematika-, technikaóra) keretében. A szakosított tantervű (matematika-tagozatos) osztályokban 5. osztálytól évente 10—15 órában tanítunk számítástechnikát. A szakosított tanterv 5., 6. osztályos számítástechnika-anyaga olyan alapismereteket tartalmaz, amely megtanítható az általános tantervű osztályokban is. A fent említett szerző javaslataihoz kapcsolódva ez úgy célravezető az általános iskolában, hogy a matematika-tantervi anyagba beépítve, matematikai problémák megoldásához eszközként felhasználva tanítanánk a számítástechnikai ismereteket.

Természetesen ez nagy felkészültséget, sok időt, új, hatékony tanítási módszerek kidolgozását, eszközök használatát igényli a tanártól, de a munkaráfordítás minden bizonnyal megtérül, akár a matematika, akár a számítástechnika oldaláról nézzük. Nagyon fontos, hogy akkor kezdjük el az algoritmikus gondolkodásmód kialakítását, a számítástechnika alapjainak a tanítását, amikor erre a tanulók a legfogékonyabbak, azaz már az általános iskolában. Az alábbiakban röviden szeretnék beszámolni azokról a tapasztalatokról, amelyeket egy szakosított tantervű hatodik osztályban a számítástechnika témakör tanításakor szereztem.

Hasonló összegzés az 1984./5. számban jelent meg dr. Koncz József tollából az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola IV. sz. Gyakorló Általános Iskolájában végzett ötödik osztályos kísérleti tapasztalatokról. A hatodik osztályt ugyanebben az iskolában tanítottam. A gyerekek felkészültsége hasonló volt a néhány évvel ezelőttihez:

Az iskolában angol-, matematika-tagozatos, illetve általános tantervű osztályok tanulnak. Az angol tagozatos osztályokba harmadik év elején a legjobb tanulókat válogatják. A matematika tagozatra negyedik év végén veszik fel a tanulókat a nem angol tagozatos osztályokból. Nehezíti a munkát, hogy elég nagy létszámú csoportokban (osztályokban) folyik a tanítás (27—31 fő). Örvendetes azonban, hogy időközben az iskola kapott 9 db COMMODORE—16 típusú személyi számítógépet, amelyeket egy tanteremben helyeztek el, biztosítva a közvetlen hozzáférést számítástechnika- és matematikaórán is.

Az ötödik osztályban tanultakra alapozva, a témakör feldolgozásánál a szakosított kiegészítő tanterv javaslat alapján a következő oktatási célokat tűztem ki:

— Számítógéppel segített problémamegoldás lépéseinek a megismerése, különös hangsúlyt fektetve az egyszerű algoritmusok, folyamatábrák készítésére.
— Egyszerű aritmetikai és szöveges változók, aritmetikai kifejezések, relációk fogalma.
— Parancs és utasítás fogalmának elmélyítése: Egyszerű, gyakran alkalmazott parancsok (PRINT, LET, INPUT, LIST, RUN, SAVE, LOAD), utasítások (INPUT, LET, PRINT).
— A metamatikai műveletek sorrendjének gyakorlása aritmetikai kifejezések értékének kiszámításán keresztül (precedencia-, balról jobbra szabályok).
— Az ABS(X) és az INT(X) numerikus függvények megtanítása.
— Feltétel, ciklus, végtelen ciklus fogalmának bevezetése.
— A feltétel nélküli „ugró" utasítás (GO TO), feltételes utasítás (IF ... THEN), ciklusutasítás (FOR... TO... STEP... NEXT) új ismeretként történő feldolgozása.

A fenti oktatási célokat az alábbi tanítási órakeretben valósítottam meg:

— Számítógéppel végzett feladatmegoldás lépései (1 óra).
— Parancs és utasítás (1 óra).
— Egyszerű aritmetikai és szöveges változók (1 óra).
— Egyszerű aritmetikai kifejezések, relációk (1 óra).
— Aritmetikai műveletek sorrendje (1 óra).
— Számítógépes gyakorlás (1 óra).
— Feltétel nélküli vezérlésátadó (ugró) utasítás (1 óra).
— Az ABS(X), INT(X) függvények (1 óra).
— Feltételes utasítás (2 óra).
— Számítógépes gyakorlás (1 óra).
— Ciklusutasítás (2 óra).
— Összefoglalás, témazáró feladatlap (1 óra).

Tanterv javasolt követelményei:

— Tudjanak a tanulók egyszerű (feltétel nélküli) folyamatábrákat készíteni.
— Tudjanak a tanulók folyamatábra alapján egyszerű programokat írni.
— Kezeljék a tanulók az INPUT, LET, PRINT utasításokat jártasság szintjén.
— Ismerjék fel a tanulók a feltételt, ismétlődést tartalmazó algoritmusokat (folyamatábrákat), feltételes és a ciklusutasításokat, tudják azok jelentését.

A tantervi követelmények figyelembevételével számba vettem a témakör feldolgozása során megtanítandó ismereteket, és az ismeretekkel összefüggésben a tudásszinteket: ráismerés, megnevezés, reprodukálás, operatív alkalmazás és a megismerő alkalmazás szintjét. Az ismeretek alkalmazásához, számonkéréséhez megfelelő feladattípusokat a tudásszintekhez igazodva állítottam össze. A feladatok között szerepelt alternatív, feleletválasztásos, konstruktív, kiegészítéses, rendszerező, besoroló feladat. A témakörben előforduló ismereteket (képzet, tény, fogalom, törvény, szabály), operatív tevékenységeket, valamint a feladattípusokat a következőképpen rendszereztem:

Tudásszint	Feladattípus
1. Ráismerés szintje: — ugró, feltételes-, ciklusutasítás felismerése adott folyamatábrában, programban.	alternatív feleletválasztásos
2. Megnevezés szintje: — egyszerű aritmetikai, szöveges változó,	

— aritmetikai kifejezés, reláció,
— folyamatábra-szimbólumok,
— tanult utasítások, parancsok. alternatív feleletválasztásos

3. Reprodukálás szintje:
— folyamatábra, program utasításainak a végrehajtása (táblázat készítés), konstruktív
— ABS(X), INT(X) numerikus függvények értelmezése, feleletválasztásos
— utasítások (LET, PRINT, INPUT, GO TO, IF... THEN, FOR... TO... NEXT) értelmezése. kiegészítéses

4. Operatív alkalmazás szintje:
— műveletek sorrendje, konstruktív
— aritmetikai kifejezés, reláció értékének kiszámítása. feleletválasztásos

5. Megismerő alkalmazás szintje:
— adott utasításszimbólumokból folyamatábra készítése, rendszerező besoroló
— beviteli, értékadó, kiíró utasításokat tartalmazó program írása, konstruktív
— feltételt, ciklust tartalmazó folyamatábra értelmezése, besoroló
— feltételt, ciklust tartalmazó program kiegészítése, javítása, kiegészítéses
— PRINT, LET, INPUT parancsok, utasítások eredményének előrelátása. konstruktív

A tudásszinteknek megfelelően feladatsorokat állítottam össze az egyes órák feldolgozásához gyakorlás és fogalomrögzítés céljából; hasonlóan a tudásszintek figyelembevételével készült a témazáró feladatlap is A és B változatban. Így ellenőrizni tudtam a követelmények teljesítését. A feladatok különböző szinteken kérték számon a tanulók tudását, fontosságát tekintve azonban nem volt különbség az egyes feladatok között, ugyanis adott szinten minden feladat megoldása egyformán fontos. A feladatok pontozásánál is ezt vettem alapul.

A témakör számonkéréséhez készített témazáró feladatsort 30 tanuló írta meg. Az osztály átlaga 89% pont teljesítésű lett. Abszolút hibátlanul a tanulók 23%-a dolgozott. Sajnos a feladatlapon szereplő 10 feladat között nem volt olyan, amelyet mindenki hibátlanul oldott meg. Megnyugtató azonban az, hogy a tanulók 90%-a jól összeállította az adott utasításszimbólumokból az egyszerű (feltétel nélküli) folyamatábrát, és 77%-a írta meg a Basic-programját.

Hasonló teljesítményt értek el rövid (feltételt, ciklust tartalmazó) programok, utasítások értelmezésével, kiegészítésével. Jól felismerték a kifejezéseket, relációkat, helyesen meghatározták azok értékét.

Nehezebbnek bizonyult az abszolútérték és az egészrész függvények értelmezése. Bár a tanulók 70%-a helyesen megoldotta ezen függvényekhez kapcsolódó feladatokat is.

A Basic-kulcsszavak alapján a tanulók 70%-a tudta megnevezni a tanult utasításokat, illetve az utasításokhoz megnevezték a Basic-kulcsszavakat.

Egyszerű folyamatábra értelmezése a tanulók 63%-ának sikerült. Egész-, valós-, karaktertípusú egyszerű változók csoportosítása típusok szerint csak a tanulók felének sikerült hibátlanul. Úgy

látszik, ez utóbbiak rögzítésére, gyakorlására a tervezettnél több időt kellett volna fordítani.

A fenti eredmények mögött komoly tanári és tanulói munka van. Figyelembe kellett venni a továbbképzésnél (5. osztályhoz viszonyítva) a tanulók számítástechnikai ismereteit. Ezen a téren az osztály összetétele igen heterogén volt. A tanulók egy része ugyanis szakkörre is jár(t), vagy otthon számítógépe van, vagy érdeklődése fokozottabb a számítástechnika iránt. Másik részük vagy nem érdeklődik kellőképpen, vagy nincs meg a számítógépes gyakorlás lehetősége a tanórán kívül stb.

Különösen kedveltek voltak azok az órák, amikor 3—4 fős csoportokban számítógép mellett lehetett dolgozni. A 30-as létszámú osztályban csak gondos tanári előkészítés és óraszervezés mellett lehetett ezeket a számítógépes gyakorlatokat hatékonyan, jól megcsinálni.

A számítógépes problémamegoldás lépéseit (elemzés, algoritmus-, folyamatábra-készítés, programírás, futtatás adatokkal) a tanulók egy-egy probléma megoldása során követték, indokoltnak tartották, hogy a tanult lépések szerint járjanak el. Tisztázódott a gyerekekben a parancs és utasítás közötti különbség, a Basic-program írásának szabálya.

Egy-egy feladat, program elkészítése, eredményének előrelátása, majd számítógép segítségével történő kiszámítása erősítette bennük azt a tényt, hogy a gép tevékenységének a szervezője az ember, a gép magától nem tud semmit.

Fontosnak tartottam a rendszeres házi feladatot és ellenőrzését. Viszonylag sok új fogalom, ismeret begyakorlását, elmélyítését, az algoritmikus gondolkodásmód erősítését segítette a tanulók otthoni munkája. A házi feladatban általában egy gondolkodtatóbb problémát kellett megoldaniuk az újabb ismeretek segítségével (pl.: algoritmus-, folyamatábra-készítése; hibás, hiányos program, folyamatábra javítása, kiegészítése; ismeretlen folyamatábra, program elemzése stb.).

A továbbiakban feladatomnak tartom a megszerzett számítástechnikai ismeretek alkalmazását a matematika valamely fejezetének (pl. 7. osztályban számelmélet) feldolgozásakor. Ez egyrészt segítené a matematika tanítását, tanulását, másrészt felszínen tartaná a számítástechnikai ismereteket is. Így a következő tanévben nem kellene szinte újra tanítani a már megtanult fogalmakat, eljárásokat, utasításokat, hanem folytathatnánk munkánkat (pl. a feltételes- és a ciklusutasítás alaposabb elemzésével, értelmezésével, a matematika tananyaghoz kapcsolódó feltételt, ciklust tartalmazó algoritmusok készítésével).

IRODALOM

[1] DR. KONCZ JÓZSEF: *Számítástechnika a szakosított matematika-tanterv alapján tanuló általános iskolai 5. osztályokban.* A Matematika Tanítása, 1984/5.
[2] DR. SIMONOVITS MIKLÓS: *Tanterv-vázlatok a Számítástechnika c. tankönyvhöz.* A Matematika Tanítása, 1987/6.

FREUD RÓBERT
egyetemi docens
ELTE, TTK, Budapest

Lineáris algebra a kombinatorikában

1. *Bevezetés*

A lineáris algebra alkalmazási területei igen szerteágazóak. Gyakran azonban úgy érezzük, hogy meglehetősen sok előismeretre van szükség mind lineáris algebrából, mind pedig az alkalmazási területről ahhoz, hogy az alkalmazásokhoz valóban eljussunk. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy számos kombinatorikai alkalmazás

szinte semmilyen előismeretet sem igényel, és mégis komoly és meglepő eredményeket tudunk így elérni.

A **2—5.** pontban mindössze az alábbi segédeszközökre támaszkodunk:

1.1. Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek száma több, mint az egyenletek száma, akkor az egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. (Ez azonnal adódik a Gauss-féle kiküszöbölési eljárásból.)

1.2. Ha a (pl. valós) szám n-esek közül n-nél többet veszünk, akkor ezek biztosan lineárisan összefüggők. (Ugyanis a lineáris összefüggőség definícióját felírva éppen egy **1.1** típusú egyenletrendszerhez jutunk.)

1.3. Valós számok helyett gyakran célszerűbb racionális számokkal vagy egy prím modulus szerinti maradékosztályokkal, általában egy (kommutatív) *test* elemeivel dolgozni.

2. *Vetélkedő*

2.1. (Itt még semmi lineáris algebra sem lesz.) Egy 32 fős osztály vetélkedő sorozatot szervez. Minden fordulóban két csapat vetélkedik, tetszőleges létszámmal. Egy csapat állhat akár egy főből is, és nem szükséges, hogy minden diák minden fordulóban részt vegyen. Csak annyit követelünk meg, hogy a vetélkedősorozat folyamán bármely két diák legalább egyszer egymás ellenfele legyen (azaz legyen olyan forduló, amikor különböző csapatban szerepelnek). Legkevesebb hány fordulóban lehet a versenyt lebonyolítani?

Válasz: 5. *Útmutatás:* (A) 5 forduló elég: Számozzuk meg a gyerekeket 0-tól 31-ig, és írjuk fel a sorszámokat kettes számrendszerben! Az egyes fordulókban aszerint képezzük a (16 fős) csapatokat, hogy az 1., 2., ..., 5. számjegy 0 vagy 1. (B) Kevesebb nem elég: Feltehetjük, hogy minden fordulóban minden diák játszik (a pihenőket berakjuk akármelyik csapatba). Az első fordulóban valamelyik csapatban legalább 16-an vannak. Közülük a második fordulóban legalább 8-an ugyanabban a csapatban szerepelnek. Ezek közül a harmadik fordulóban legalább 4-en csapattársak, a negyedik fordulóban pedig legalább ketten, ők tehát egyszer sem voltak ellenfelek.

2.2. Egy icipicit módosítjuk az előző feladat feltételeit: a versenyt úgy kell megrendezni, hogy bármely két diák *pontosan* egy alkalommal legyen egymás ellenfele. Mennyi így a fordulók minimális száma?

Megoldás:

Könnyen látható, hogy 31 forduló elegendő; egy lehetséges lebonyolítás a következő: Az első fordulóban az egyik csapat egyetlen diákból áll, a másik csapat a többi 31-ből. A második fordulóban a 31 diákból egy alkotja az egyik csapatot, a többi 30 a másikat stb.

Meglepő azonban, hogy semmilyen próbálkozással sem tudjuk a fordulók számát csökkenteni. Megmutatjuk ugyanis, hogy 30 vagy kevesebb fordulóval a feltételeket nem lehet teljesíteni.

Készítsünk egy 32 szögpontú teljes gráfot. A csúcsokat feleltessük meg a diákoknak, az i-edik csúcs mellé írjunk egy később alkalmasan megválasztandó x_i valós számot, $i=1, 2, 3, ..., 32$, az i-edik és a j-edik csúcsot összekötő élre pedig írjuk az $x_i x_j$ szorzatot.

Tegyük most fel indirekt, hogy 30 vagy kevesebb fordulóban lebonyolítható a verseny. Azt, hogy az i-edik és a j-edik tanuló (valamikor) egymás ellenfele, az őket összekötő élen levő $x_i x_j$ szorzattal hozzuk kapcsolatba.

Tekintsük az összes élen levő szorzatok S összegét.

$$(1) \qquad S = \sum_{1 \leq i < j \leq 32} x_i x_j = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{m=1}^{32} x_m \right)^2 - \sum_{m=1}^{32} x_m^2 \right].$$

Számoljuk most meg, hogy egy-egy fordulóban a szemben álló csapatok „mennyivel járulnak hozzá" az S összeghez: legyen S_t a t-edik fordulóban az „ellenfél" diákokat összekötő élekre írt $x_i x_j$ szorzatok összege. Mivel a verseny során bármely két diák pontosan egyszer lesz egymás ellenfele, így

$$(2) \qquad S = \sum_{t=1}^{r} S_t,$$

ahol r a fordulók számát jelöli. Másrészt

$$(3) \qquad S_t = \left(\sum_{k \in C_{1t}} x_k \right) \left(\sum_{l \in C_{2t}} x_l \right),$$

ahol C_{1t}, illetve C_{2t} jelöli a t-edik forduló két csapatát, ugyanis egy adott fordulóban az egyik csapat minden tagja a másik csapat minden tagjának ellenfele, tehát minden olyan $x_k x_l$ szorzatot össze kell adni, ahol k az első, l pedig a második csapatban szerepel.

Az (1), (2) és (3) képletek alapján az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$(4) \qquad \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{m=1}^{32} x_m \right)^2 - \sum_{m=1}^{32} x_m^2 \right] = \sum_{t=1}^{r} \left(\sum_{k \in C_{1t}} x_k \right) \left(\sum_{l \in C_{2t}} x_l \right).$$

A (4) egyenlőség egy azonosság: az $x_1, x_2, \ldots, x_{32}$ értékek tetszőleges megválasztása mellett fenn kell állnia. Válasszuk most meg ezeket úgy, hogy

$$(5) \qquad \sum_{m=1}^{32} x_m = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{k \in C_{1t}} x_k = 0, \quad t = 1, 2, \ldots, r$$

teljesüljön. Az (5) egyenletrendszerben az ismeretlenek száma 32, az egyenleteké $r+1$, ami az indirekt feltevés szerint legfeljebb 31. Így **1.1** alapján az egyenletrendszernek van nemtriviális (valós) megoldása. Egy ilyen megoldást (4)-be behelyettesítve

$$\sum_{m=1}^{32} x_m^2 = 0$$

adódik, ami ellentmondás, hiszen valós számok négyzetösszege csak akkor lehet 0, ha mindegyikük 0 volt.

Megjegyzés: Tulajdonképpen azt láttuk be, hogy ha egy n szögpontú teljes gráfot éldiszjunkt teljes páros gráfok uniójára bontunk, akkor minimálisan $n-1$ páros gráf szükséges ehhez. (Ha azonban az élidegenség feltételét elejtjük, akkor ez a szám a 2.1 pont gondolatmenete szerint $\lceil \log_2 n \rceil$-re csökken, ahol $\lceil s \rceil$ az s szám felső egész részét jelöli.)

3. *Párosváros*

3.1. Képzeljünk el egy icipici, mondjuk 32 lakosú városkát, amelynek a lakói azonban igen aktív közéletet élnek. Rengeteg egyesületet alapítanak, kezdetben mindenféle szabályozás nélkül. Mindössze annyit kötnek ki, hogy két egyesületnek nem lehet teljesen azonos a tagsága (hiszen akkor ez a kettő tulajdonképpen ugyanaz

az egyesület, csak más néven). Még a „tagnélküli" egyesületet is bejegyzik, amelynek tehát senki sem tagja. (Ebben az egyesületben biztos nem kerül sor éles vitákra!) Hány egyesület jöhet így létre? (*Válasz:* $2^{32}=4\,294\,967\,296$.)

3.2. Az egyesületek túlburjánzása miatt némi korlátozó intézkedéseket kell bevezetni. A (PS) törvény kimondja, hogy egy egyesületnek csak páros számú tagja lehet. Sajnos, ez a törvény nem váltja be a hozzáfűzött reményeket. Az még nem lenne baj, hogy megkegyelmez a tagnélküli egyesületnek, azonban a többiek számát sem képes elég radikálisan csökkenteni: még így is 2^{31} egyesületre van lehetőség. *(Miért?)* Emiatt bevezetik a (PSPS) törvényt, amely egyrészt megtartja azt a szabályt, hogy egy egyesületnek páros sok tagja kell hogy legyen, másrészt azt is előírja, hogy két egyesület közös tagjainak a száma is csak páros lehet. Hány egyesület alapítását teszi lehetővé ez a már jóval szigorúbb rendelet?

Válasz: $2^{16}=65\,536$. *Útmutatás:* Ha a 32 embert 16 párba osztjuk, és a párokból képezett összes egyesületet tekintjük, akkor ezek száma 2^{16}. Megmutatható, hogy ennél jóval több egyesület nem hozható létre, de ez már jóval nehezebb.

3.3 A városatyák még egy kétségbeesett, de nem sok reménnyel kecsegtető kísérletet tesznek, megszavazzák a város nevéhez méltatlan (PTPS) törvényt: Minden egyesületnek *páratlan* sok tagja kell hogy legyen, de két egyesület közös tagjainak a száma továbbra is csak páros lehet. Nézzük, mennyit javít ez a helyzeten.

32 egyesületet mindenesetre létre lehet hozni: például úgy, hogy mindenki egyedül alkot egy egyesületet, de úgy is hogy bármely 31 ember van egy egyesületben. Bárhogyan próbálkozunk is azonban, 32-nél többet sehogy sem sikerül összehozni.

Tétel: A (PTPS) törvény mellett egy n lakosú városban nem lehet n-nél több egyesületet alapítani. (Halmazokra átfogalmazva: egy n elemű halmaznak legfeljebb n olyan páratlan elemszámú részhalmaza van, amelyek közül bármely kettő metszete páros.)

Bizonyítás:

A városlakókat számozzuk meg 1-től n-ig, és minden egyesületnek feleltessünk meg egy n hosszúságú 0-kból és 1-ekből álló vektort, amelyben az i-edik komponens akkor 1, ha az i-edik lakos tagja az egyesületnek, egyébként 0. Azaz ha az egyesületeket $E_1, E_2, \ldots, E_k$-val jelöljük, akkor a nekik megfelelő vektorok $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, ahol

$$\mathbf{v}_j = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn}), \quad \alpha_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in E_j \\ 0, & \text{ha } i \notin E_j. \end{cases}$$

Definiáljuk két vektor skaláris szorzatát a szokásos módon:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \beta_1\gamma_1 + \ldots + \beta_n\gamma_n.$$

Ekkor

$$\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_r = |E_j \cap E_r| \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j = |E_j|,$$

tehát a skaláris szorzat a megfelelő halmazok metszetének elemszámát adja meg. A feltételek szerint így

$$\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_r = \begin{cases} \text{páros} & \text{ha } j \neq r \\ \text{páratlan} & \text{ha } j = r. \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok a modulo 2 maradékosztályok teste fölött lineárisan függetlenek. Ebből az **1.2** pont szerint következik, hogy számuk legfeljebb n, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Vegyünk tehát egy

$$\delta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \delta_k \mathbf{v}_k = 0$$

lineáris kombinációt. Ha mindkét oldalt skalárisan megszorozzuk $\mathbf{v}_j$-vel, akkor

$$\delta_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_j + \ldots + \delta_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j + \ldots + \delta_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_j = 0$$

adódik. A feltételek szerint itt minden $\mathbf{v}_r \mathbf{v}_j$ szorzat 0 modulo 2, kivéve $\mathbf{v}_j \mathbf{v}_j$-t, ami 1. Vagyis $\delta_j = 0$. Mivel ez tetszőleges j-re teljesül, ezért a $\mathbf{v}_r$ vektorok valóban lineárisan függetlenek.

Általánosítás:

Legyen s rögzített pozitív egész. Maximálisan hány olyan E_j részhalmaza lehet egy n elemű halmaznak, amelyekre $s \nmid |E_j|$, de $r \neq j$ esetén $s \mid |E_r \cap E_j|$?

Mindig meg lehet adni n ilyen halmazt; az egyeleműeket. Az előző tételben megmutattuk, hogy $s = 2$ esetén ez a maximum. Ugyanígy elintézhető minden olyan eset, amikor s prímszám. Az állítás akkor is igaz marad, ha s egy prímszám hatványa, a bizonyítást azonban módosítani kell: ekkor a halmazoknak megfelelő vektorok a racionális test felett lesznek lineárisan függetlenek. A többi s-re a probléma *megoldatlan;* már $s = 6$ esetén is csak annyi adódik, hogy a maximum legfeljebb $2n$ (illetve nagy nehézségek árán sikerült ezt egy hajszálnyival lejjebb szorítani).

Feladatok:

F 1. Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ olyan n hosszúságú vektorok, amelyekben minden komponens 0 vagy 1. Ezeket a vektorokat tekinthetjük a valós, a racionális, illetve a modulo p (p prím) maradékosztályok teste fölötti vektoroknak is.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek a valós test fölött, ha lineárisan függetlenek a racionális test fölött.

b) Bizonyítsuk be, hogy a modulo p test feletti függetlenségből következik a racionális test feletti függetlenség, de ez megfordítva nem igaz.

F 2. Maximálisan hány olyan páros elemszámú részhalmaza lehet egy n elemű halmaznak, ahol bármely két részhalmaz metszete páratlan. (*Válasz:* n, ha n páratlan, és $n-1$, ha n páros.)

F 3. Maximálisan hány olyan részhalmaza lehet egy n elemű halmaznak, amelyek közül bármely kettő metszete egy elemű?

Válasz: n. Útmutatás: Igazoljuk, hogy a megfelelő vektorok a valós test fölött lineárisan függetlenek. *Megjegyzés:* A feladat szoros kapcsolatban van a véges projektív síkokkal (az elemek a pontoknak, a részhalmazok az egyeneseknek felelnek meg).

4. *Mind a tizenhárom*

Adva van 13 valós szám. Akármelyiket is hagyjuk el, a maradék 12 darab beosztható két hatos csoportba úgy, hogy az egyes csoportokban levő számok összege megegyezik. Bizonyítsuk be, hogy mind a 13 szám egyenlő.

Első bizonyítás:

(i) Először racionális számokra igazoljuk az állítást. Vegyük észre, hogy a számokat egy konstanssal beszorozva vagy egy konstanst hozzájuk adva a feltételek nem változnak meg. Ezt felhasználva, pozitív egészekre a számok összege (vagy

legnagyobbika) szerinti teljes indukcióval könnyen célhoz érünk. Ezután a racionális számok esetét beszorzással, majd eltolással a pozitív egészekre vezethetjük vissza.

(ii) Az általános esetre rátérve, tekintsük az adott 13 valós számot. Ezeknek a racionális számokkal képezett összes lineáris kombinációi egy legfeljebb 13 dimenziós vektorteret alkotnak a racionális számok felett a szokásos műveletekre. Vegyünk ebben egy bázist, és írjuk fel az eredetileg adott számainkat, mint a báziselemek racionális együtthatós lineáris kombinációit. A feladat feltételei így azt jelentik, hogy ugyanezek a feltételek valamennyi komponensben teljesülnek. Mivel a báziselemek együtthatói már racionális számok, ezért az (i) rész alapján azt kapjuk, hogy a számaink valamennyi komponensben megegyeznek, azaz maguk is egyenlők.

Második bizonyítás:

Legyenek a számok $x_1, x_2, \ldots, x_{13}$. Alkalmas eltolás után feltehető, hogy $x_1=0$. A feladat feltétele azt jelenti, hogy az x_i-kből képezett bizonyos összegek megegyeznek. Ezeket felírva és átrendezve egy homogén lineáris egyenletrendszert kapunk, 13 egyenlettel és ($x_1=0$ miatt csak) 12 ismeretlennel. A feladathoz azt kell megmutatnunk, hogy az egyenletrendszernek csak triviális megoldása létezik.

Az első bizonyítás (i) része alapján ez racionális számokra igaz. Belátjuk, hogy a valós számok körében sem kaphatunk más megoldást. Mivel az egyenletrendszer megoldása (Gauss-féle kiküszöbölés) során mindvégig az együtthatókkal csak a négy alapműveletet végezzük, tehát ugyanahhoz az eredményhez jutunk, akár a racionális, akár a valós számok körében keressük a megoldásokat, hiszen a kiindulási együtthatók racionálisak voltak (± 1 és 0). (Vö. az **F 1.** feladat *a)* részével is.)

Harmadik bizonyítás:

Az **F 1** feladat alapján elég azt igazolni, hogy a második bizonyításban elért egyenletrendszernek a modulo 2 testben csak a triviális megoldása létezik. (Ebből ugyanis az említett feladat szerint már következik, hogy a valós számok körében sincs más megoldás.) Modulo 2 viszont az igazolandó állítás csak annyit mond ki, hogy ha a megfelelő hatos összegek paritása megegyezik, akkor mind a 13 szám azonos paritású, ez pedig nyilvánvaló.

Negyedik bizonyítás:

A racionálisról a valósra történő átmenet eszköze most nem a(z elemi) lineáris algebra, hanem az elemi számelmélet lesz. Az adott valós számokat nagyon jól közelítjük majd racionálisakkal, és arra fogunk támaszkodni, hogy ezekre a közelítő törtekre már igaz az állítás.

Lemma: Tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_k$ valós számokhoz és N pozitív egészhez léteznek olyan $a_1, a_2, \ldots, a_k$ egészek és $b \leqq N^k$ természetes szám, amelyekre

$$\left| x_i - \frac{a_i}{b} \right| \leqq \frac{1}{Nb} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

A lemma bizonyítása:

Minden $1 \leqq t \leqq N^k+1$ egész számra készítsük el a

$$\mathbf{v}_t = (\{tx_1\}, \ldots, \{tx_k\})$$

vektorokat, ahol

(6) $$\{y\} = y - \lfloor y \rfloor,$$

tehát $\{y\}$ az y szám ún. törtrésze, azaz a hozzá balról legközelebbi egésztől mért távolsága. A skatulyaelv alapján lesz olyan $t \neq s$, hogy a $\mathbf{v}_t$ és $\mathbf{v}_s$ vektorok bármely komponensében az eltérés legfeljebb $1/N$. Beírva (6)-ot, így azt kapjuk, hogy valamilyen a_i egészekkel és $b = |s-t|$-vel

$$|bx_i - a_i| \leq 1/N$$

teljesül minden i-re. Ez pedig éppen a lemma állítása.

A tétel bizonyításához alkalmazzuk a lemmát az adott x_i valós számokra és $N \geqq 13$-ra. A feladat feltételeiben szereplő egyenlőségekben az x_i-k helyett a közelítő a_i/b-ket írva, a két oldal eltérése a lemma alapján legfeljebb $12/Nb < 1/b$, de mivel mindkét oldalon b nevezőjű törtek állnak, így a két oldal csak egyenlő lehet. Vagyis a közelítő törtekre is teljesülnek a feladat feltételei. Ekkor tudjuk, hogy a közelítő törtek szükségképpen valamennyien egyenlők. Ugyanezt tetszőlegesen nagy N-ekre elvégezve adódik, hogy a valós számok is mind meg kell hogy egyezzenek.

5. *Négyzetszámok kerestetnek*

Adott 11 pozitív egész, amelyek egyikének sincs 30-nál nagyobb prímosztója. Bizonyítsuk be, hogy a számok közül kiválasztható néhány különböző (esetleg csak egy, esetleg az összes) úgy, hogy a szorzatuk négyzetszám legyen.

Első bizonyítás

Képezzük a számainkból valahány különbözőnek a szorzatát minden lehetséges módon. Így $2^{11}-1$ szorzatot kapunk. Most vizsgáljuk meg, hogy egy szám hányféle lehet abból a szempontból, hogy prímtényezős felbontásban a 30-nál kisebb prímek kitevője páros vagy páratlan. Ez 2^{10} lehetőség, mivel tíz darab 30-nál kisebb prím van. A skatulyaelv alapján tehát a szorzataink között lesz két olyan, amelyekben az egyes prímek kitevői azonos paritásúak. Ha most ebből a két szorzatból elhagyjuk a közös tényezőket, és a megmaradtakat összeszorozzuk, akkor olyan szorzathoz jutunk, amely négyzetszám.

Második bizonyítás

Az adott $a_1, \ldots, a_{11}$ számoknak feleltessünk meg $\mathbf{v}_i$ vektorokat a következőképpen:

$$\mathbf{v}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{i10}), \quad \alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } a_i\text{-ben a } j\text{-edik prím kitevője páratlan} \\ 0, & \text{ha } a_i\text{-ben a } j\text{-edik prím kitevője páros.} \end{cases}$$

Egy ilyen vektor tehát a számban szereplő prímek kitevőinek a paritását mutatja, és a vektorok modulo 2 vett összeadása a számok szorzásának felel meg. Ez a 11 darab 10 dimenziós vektor lineárisan összefüggő a modulo 2 test felett, tehát van olyan nemtriviális lineáris kombinációjuk, amely 0-t ad. Szorozzuk össze azokat az a_i-ket, amelyeknek megfelelő v_i-k ebben a kombinációban nem nulla (azaz 1) együtthatóval szerepelnek. Mivel a megfelelő v_i vektorok összege nulla, ezért ez a szorzat négyzetszám.

Megjegyzések:

1. Tulajdonképpen az alábbi állítást igazoltuk: Ha adott $k+1$ olyan pozitív egész, amelyek egyikének sincs a $p_1, \ldots, p_k$ prímszámoktól különböző prímosztója, akkor a számok közül kiválasztható néhány különböző úgy, hogy a szorzatuk négyzetszám.

Nyilvánvaló, hogy ugyanez k pozitív egészre még nem igaz, tekintsük például a $p_1, \ldots, p_k$ prímeket.

2. A két bizonyítás közül a lineáris algebrát használó második felesleges nagyágyúnak tűnik. Mégis igen nagy a jelentősége, ugyanis ez egyben *gyors algoritmust* is ad egy jó szorzat megkeresésére (szemben a skatulyaelves első bizonyítással): a lineáris összefüggőségnél egy lineáris egyenletrendszert kell megoldani, például Gauss-féle kiküszöböléssel. Ez a tény annál a fontos gyakorlati alkalmazásnál is lényeges szerepet játszik, amikor egy nagy összetett számot akarunk tényezőkre bontani. Erre a feladatra igazán gyors algoritmus nem ismeretes (szemben azzal, amikor csak a szám prím vagy összetett voltát szeretnénk eldönteni), de a jelenleg használt leggyorsabb módszerek általában a fentiekre (is) támaszkodnak.

3. Ha a feladatot négyzetszámok helyett pl. köbszámokra akarjuk általánosítani, akkor egyik bizonyítás sem vihető át. Azonban számelméleti, illetve csoportelméleti meggondolásokkal igazolható az alábbi (éles) tétel: Ha t prímszám vagy egy prímszám hatványa, és adott $(t-1)k+1$ darab pozitív egész, amelyek egyikének sincs a $p_1, \ldots, p_k$ prímektől különböző prímosztója, akkor a számaink közül kiválasztható néhány különböző úgy, hogy a szorzatuk t-edik hatvány legyen.

6. *Szép gráfok*

Ebben a részben egy meglepő és szép gráfelméleti tételt igazolunk, egy kicsit több lineáris algebra felhasználásával. Viccesen azonban akár úgy is fogalmazhatnék, hogy mindennek az az oka, hogy a 15-nek csak az 1, a 3, az 5 és a 15 az osztói.

Tekintsünk egy olyan gráfot, amelyben minden csúcsból r él indul ki, és amelyben nincs ötnél rövidebb kör. Hány csúcsa lehet egy ilyen gráfnak?

Vegyünk egy tetszőleges csúcsot. Ebből r él indul ki, tehát újabb r csúcsot kapunk. Az új csúcsok mindegyikéből $r-1$ újabb él indul ki. Se két ilyen él, se a végpontjaik nem eshetnek egybe, mert akkor egy 3, ill. 4 hosszúságú körhöz jutnánk. Az élek végpontjai tehát újabb $r(r-1)$ csúcsot adnak. A gráfnak tehát összesen legalább r^2+1 csúcsa van.

Milyen r-ekre állhat itt egyenlőség? Nyilván $r=1$ és $r=2$ megfelel (a gráf ekkor egyetlen él, ill. egy öt hosszúságú kör). Kicsit nehezebb $r=3$-ra egy jó gráfot mutatni, de van ilyen, az ún. Petersen-gráf. Viszont $r=4$, 5 és 6 egyike sem jó, amint ez növekvő nehézségű számolásokkal igazolható. Bravúros módon A. J. Hoffman és R. R. Singleton 1960-ban $r=7$-re ismét találtak egy jó gráfot; ezt egy csomó Petersen-gráf összeragasztásával nyerték. És mi a helyzet nagyobb r-ekre?

Hoffmann—Singleton tétele:

Tegyük fel, hogy egy gráf minden csúcsából r él indul ki, a gráfban nincs ötnél rövidebb kör, és a gráfnak r^2+1 csúcsa van. Ekkor r értéke csak 1, 2, 3, 7 vagy 57 lehet.

Megjegyzés: Nem tudjuk, hogy $r=57$-re valóban létezik-e ilyen gráf.

Bizonyítás:

6.1. Az elején látott meggondolásokból adódik, hogy a gráfban bármely két csúcs vagy szomszédos, vagy pedig pontosan egy közös szomszédjuk van.

6.2. Legyen $A=[a_{ij}]$ a gráf adjacencia (szomszédsági) mátrixa, azaz

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{ha az } i \text{ és } j \text{ csúcsok éllel össze vannak kötve}\\ 0, & \text{egyébként,}\end{cases} \qquad i,j=1,2,\ldots,r^2+1.$$

Könnyen látható, hogy az $A^2=[b_{ij}]$ mátrixban b_{ij} éppen az i és j csúcsok közös szomszédainak a száma.

Így a **6.1** pont alapján az

$$A^2+A-(r-1)I=J \tag{7}$$

mátrixegyenlet teljesül, ahol I az egységmátrix, J pedig a csupa 1-ből álló mátrix.

6.3. Mivel A szimmetrikus mátrix, ezért $n=r^2+1$ független sajátvektora van. A (7) egyenletből könnyen adódik, hogy ha v sajátvektora A-nak λ sajátértékkel, akkor v sajátvektora J-nek is, éspedig

$$\mu=\lambda^2+\lambda-(r-1) \tag{8}$$

sajátértékkel. Mivel a J-nek az n egyszeres sajátértéke, és minden további sajátértéke 0, ezért az A-nak (8) alapján az r egyszeres sajátértéke (ami közvetlenül is adódott volna), a további sajátértékei pedig kielégítik a

$$\lambda^2+\lambda-(r-1)=0$$

egyenletet. Ezt megoldva kapjuk, hogy A további sajátértékei

$$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{4r-3}}{2} \quad \text{és} \quad \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{4r-3}}{2},$$

multiplicitásuk m_1, illetve m_2, ahol

$$m_1+m_2=n-1=r^2. \tag{9}$$

6.4. Írjuk fel az A mátrix nyomát. Ez egyrészt a főátlóbeli elemek összege, azaz 0, másrészt a sajátértékek összege. Tehát

$$m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+r=\frac{m_1-m_2}{2}\sqrt{4r-3}-\frac{m_1+m_2}{2}+r=0 \tag{10}$$

adódik. Ez csak úgy teljesülhet, ha $m_1=m_2$ vagy pedig $s=\sqrt{4r-3}$ egész szám.

Az első esetben (9)-ből és (10)-ből kapjuk, hogy $r^2=2r$, azaz $r=2$. A második esetben az

$$r=\frac{s^2+3}{4}$$

összefüggést (10)-be beírva

$$-s^4+2s^2+16s(m_1-m_2)+15=0$$

adódik. Vagyis s osztója a 15-nek, tehát $s=1, 3, 5$ vagy 15. Innen $r=1, 3, 7$ vagy 57.

MÁTÉ LÁSZLÓ
egyetemi docens
BME, Budapest

26 feladat lineáris algebrából

101. Legyenek egy $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalainak felezőpontjai F_1 és F_2. Igazoljuk:

$$F_1F_2 = 0{,}5(AB+DC).$$

102. Igaz-e az előző feladat állítása tetszőleges négyszögre?

103. Melyek azok a négyszögek, amelyeknek az oldalfelező egyenesei metszik egymást?

104. Igazoljuk, hogy bármely síknégyszög oldalfelező pontjai egy parallelogramma csúcspontjai. Igaz ez *térbeli* négyszögekre is?

105. Legyen A és B két rögzített pont. Hol fekszenek azok a P pontok, amelyeknek az A pontból mért távolságuk kétszer akkora, mint a B ponttól mért távolságuk?

106. Legyenek A és B egy O középpontú kör kerületének pontjai és OAB egyenlő oldalú háromszöget alkosson.

Igazoljuk, hogy ekkor a kör kerületének *tetszőleges* X pontjára

$$|XA|^2+|XB|^2 = |XO'|^2,$$

ahol O' az O tükörképe az AB egyenesre.

107. Hogyan módosul a fenti egyenlőség, ha A és B a kör kerületének olyan rögzített pontjai, amelyeknek távolsága *nem egyenlő a kör sugarával.*

Adjunk olyan feladatot, amely az előző feladat *térbeli* megfelelőjének tekinthető!

108. Legyen XYZ derékszögű koordináta-rendszer és ABC (térbeli) háromszög. Az XY, YZ, és ZX koordináta síkokon az ABC háromszög ortogonális (derékszögű) vetületeinek területei legyenek rendre T_1, T_2 és T_3. Igazoljuk, hogy

$$T_1^2+T_2^2+T_3^2 = T^2,$$

ahol T az ABC háromszög területe.

109. Egy háromszög csúcsait összekötjük a szemközti oldal felezőpontjával. Igazoljuk, hogy az így kapott egyenesek egy pontban metszik egymást. Milyen arányban metszik egymást?

110. Egy tetraéder csúcspontjait összekötjük a szemközti lap súlypontjával. Igazoljuk, hogy az így kapott négy egyenes egy pontban metszi egymást. Milyen arányban metszik egymást?

111. Adott $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ síkvektorokhoz van olyan $k \leqq n$, hogy *minden* $1 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq 0$ szám-n-esre a következő egyenlőtlenség érvényes

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right| \leqq \left|\sum_{j=1}^{k} v_j\right|.$$

Érvényes ez az állítás *térvektorokra is?*

201. Az

$$\{A \cdot \sin(t+\varphi):\ A \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi\}$$

függvényeket röviden (2π-periódusú) szinuszfüggvényeknek nevezzük. A szinuszfüggvények fontos tulajdonsága, hogy összegük (más néven: *szuperpozíciójuk*) újra szinuszfüggvény. Ennek szokásos bizonyítása az

$$(*) \qquad A \cdot \sin(t+\varphi) = A \cdot \cos\varphi \cdot \sin t + A \cdot \sin\varphi \cdot \cos t$$

addíciós formulán alapul.

Egy grafikus eljárás szinuszfüggvények szuperpozíciójára a következő:

Mindegyik $y = A \cdot \sin(t+\varphi)$ függvényhez hozzárendeljük az

$$A \cdot \cos\varphi \cdot \mathbf{i} + A \cdot \sin\varphi \cdot \mathbf{j}$$

(sík)vektort és az így nyert vektorokat összeadjuk. Az összegvektor abszolút értéke az összegfüggvény A amplitúdója, az X tengellyel bezárt szöge pedig az összegfüggvény φ fázisszöge lesz.

Igazoljuk ezt az eljárást!

202. Ismeretes, hogy három adott pontra pontosan egy

$$(*) \qquad p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

parabola illeszkedik. Ez azt is jelenti, hogy

$$p(x) \Leftrightarrow p(a)\mathbf{i} + p(b)\mathbf{j} + p(c)\mathbf{k}$$

egy 1-1 leképezés a $(*)$ parabolák és a geometriai vektorok között.

Melyek az **i**, **j**, **k** bázisvektoroknak megfelelő polinomok ebben a leképezésben?

Igazoljuk, hogy az így kapott három polinommal minden másodfokú polinom lineáris kombinációval előállítható. Írjuk le azt az eljárást, *ahogyan* előállítható.

Megjegyzés. A

$$p(x) \Leftrightarrow A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$$

szintén egy lineáris izomorfizmus a $(*)$ parabolák és geometriai vektorok között. Ez az 1-1 leképezés azonban *nem érdekes* feladatunk szempontjából.

203. Fibonacci-sorozatnak nevezik az

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad n = 1, 2, \ldots$$

rekurziós formulát kielégítő sorozatokat. Ezért a sorozat első két eleme, a_0 és a_1, meghatározza a Fibonacci-sorozatot és könnyű belátni, hogy bármelyik Fibonacci-sorozat az

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad \text{és} \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0$$

„kezdetű" sorozatok lineáris kombinációja.

Ennél érdekesebb „bázist" kapunk, ha megkeressük mindazokat a Fibonacci-sorozatokat, *amelyek geometriai sorozatok is.*

Melyek ezek a sorozatok?

Igazoljuk, hogy a Fibonacci geometriai sorozatok egy bázist alkotnak abban az értelemben, hogy minden Fibonacci-sorozat *egyértelműen* felírható, mint ezen geometriai sorozatok lineáris kombinációja.

204. Bűvös négyzetnek nevezzük azt a 3×3 mátrixot, amelynek

a) elemei pozitív egész számok;

b) minden sorában, oszlopában, fő- és mellékátlójában az elemek összege ugyanannyi.

Igazoljuk, hogy

I. bűvös négyzetek lineáris kombinációja is bűvös négyzet, ha az együtthatók pozitív egész számok.

II. Ha a 4 szimmetria tengelyére tükrözzük a négyzetes mátrixot, akkor is bűvös négyzetet kapunk. (És ha felcseréljük a mátrix sorait?)

205. Hogyan szerkesszünk bűvös négyzetet? Például úgy, hogy megadjuk a **204.** *b)* feltételt leíró, hét egyenletből álló lineáris egyenletrendszer egyik megoldását a pozitív egész számok köréből. Ez hosszú, fáradságos és unalmas. A következő feladaton keresztül egy egyszerűbb és érdekesebb utat mutatunk:

Engedjük meg, hogy a bűvös négyzet elemei *tetszőleges egész számok* legyenek, és szerkesszünk *minimális számú* olyan bűvös négyzetet, amelynek lineáris kombinációival minden bűvös négyzet előállítható.

206. Az előző feladat alapján adjunk meg egy eljárást a **204.** feladatban értelmezett (tehát pozitív egész számokból álló) bűvös négyzetek szerkesztésére.

207. Adjuk meg az

$$xy+yz+xz = x^2+y^2+z^2$$

egyenlet összes (valós) megoldását.

301. Igazoljuk, hogy

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \leqq (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

Érvényes ez $n \geqq 4$-re is?

302. Ha $n \geqq 10$ mintavételi pont alapján akarunk egy tapasztalati függvényt polinommal interpolálni, akkor alkalmasabb ha több, szakaszonként legfeljebb harmadfokú polinommal interpolálunk, mint egy szál n-edfokú polinommal.

A legegyszerűbb eset ha szakaszonként elsőfokú polinommal interpolálunk, amelynek grafikonja egy „törtvonal".

A $t=t(x)$ törtvonal-függvény és a (rendezett) szám-n-esek között a következő 1-1 leképezés van

$$t \Leftrightarrow \{t(x_1), t(x_2), \ldots, t(x_n)\}$$

ha a „töréspontok" X koordinátái rögzítettek. Ez egyben lineáris izomorfizmus.

Igazoljuk, hogy minden törtvonal-függvény *egyértelműen* felírható, mint a

$$t_k\colon\ t_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = k, \\ 0, & \text{ha } i \neq k. \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

ún. háromszög-függvények lineáris kombinációja.

303. *A* gondol egy $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-dimenziós vektort és *B*-nek ezt ki kell találnia a következő eljárással:

B mond egy $\mathbf{x}$ vektort és *A* közli *B*-vel az

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} := \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

skaláris szorzat értékét.

Feltételezve, hogy a játékban szereplő vektorok *minden komponense pozitív egész szám,* minimálisan hány $\mathbf{x}$ vektor kell az a meghatározásához.

401. Egy n-elemű halmaz részhalmazai 1-1 kapcsolatba hozhatók n-dimenziós oszlop-mátrixokkal a következőképpen:

Adott részhalmazhoz hozzárendeljük azt az oszlopmátrixot, amelynek k-adik eleme 1, ha a halmaz k-adik eleme *benne van* az illető részhalmazban és 0, ha *nem.*

Mi a jelentése ekkor a mátrixok skaláris szorzatának és mi a jelentése a mátrixok összegének [mod 2]?

402. Egy n-elemű halmaz minden részhalmazához hozzárendeljük azt az n-dimenziós (n-elemű) vektort, amelynek k-adik helyén 1 vagy 0 áll, aszerint, hogy a halmaz

k-adik eleme az illető részhalmazba tartozik, vagy sem. Mennyi az így kapott vektorok száma?

403. Igazoljuk, hogy egy n-elemű halmaz *összes* nem üres részhalmazainak száma: 2^n-1.

404. Igazoljuk a következő egyenlőséget

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n-1.$$

405. Egy angol kisváros lakói klubokat alakítanak és mindegyik lakos több klubnak is lehet a tagja.

Igazoljuk, hogy ha *bármely két klub közös tagjainak a száma megegyezik*, akkor nem lehet több klub, mint lakos (dacára annak, hogy egy lakos több klubnak is lehet a tagja).

A feladatok megoldásai

101. *(1. ábra.)* Legyen $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}$; ekkor a bizonyítandó állítást a vektoralgebra nyelvén felírva:

$$\overrightarrow{F_1F_2}=\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{2}-\frac{\mathbf{d}}{2}$$

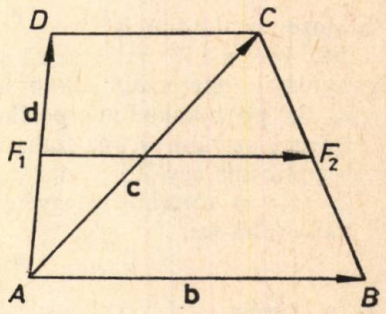
és

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{b}+(\mathbf{c}-\mathbf{d})$$

alapján

$$\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{2}-\frac{\mathbf{d}}{2}=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}}{2}$$

és ez nyilvánvaló azonosság.



1. ábra

102. Igaz, hiszen a fenti bizonyításban sehol sem tételezzük fel azt, hogy BC és AD párhuzamos.

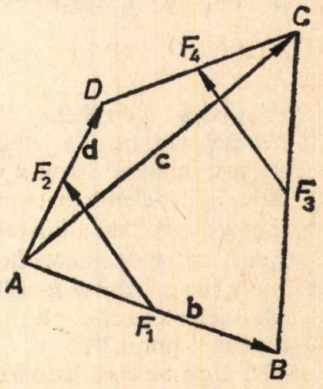
103. Bármilyen megoldást is találunk, hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a megoldás **104.**-ből is következik. (**104.**$\Rightarrow F_1F_2F_3F_4$ paralellogramma $\Rightarrow$ a parallelogramma átlói felezik egymást.)

Itt a többet mondani látszó **104.** feladat megoldása a könnyebb sőt, a fenti logikai lánc végeredménye nemcsak azt mondja ki, hogy bármely négyszögben az oldalfelező egyenesek metszik egymást, hanem azt is, hogy *a metszéspontjuk éppen a felezőpont.*

104. *(2. ábra.)* Elegendő azt igazolni, hogy $\overrightarrow{F_1F_2}=\overrightarrow{F_3F_4}$ (vagyis, az F_1F_2 és F_3F_4 egyenesek párhuzamosak és hosszúságuk egyenlő). Ez viszont, a **101.** feladat jelölésével,

$$\frac{\mathbf{b}}{2}-\frac{\mathbf{d}}{2}=\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{2}-\left[\mathbf{d}+\frac{\mathbf{c}-\mathbf{d}}{2}\right]$$

ami bármely **a**, **b**, **c**, **d** vektorokra igaz *függetlenül attól*, hogy egy síkban vannak, vagy sem.



2. ábra

Itt egy síkbeli ábrából kiindulva, a vektoralgebra eszközeivel, olyan térbeli összefüggésre jutottunk, amelynek (eléggé) általános illusztrálása nehéz.

105. Legyen $\overrightarrow{AB}=\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AP}=\mathbf{r}$. Ekkor, a vektoralgebra nyelvén, a P pont helyzetét a következő egyenlőség határozza meg

$$\mathbf{r}^2 = 4(\mathbf{r}-\mathbf{c})^2$$

és ebből, algebrai átalakításokkal

$$\left(\mathbf{r}-\frac{4}{3}\mathbf{c}\right)^2 = \frac{4}{9}\mathbf{c}^2.$$

Ez viszont a $\frac{4}{3}\mathbf{c}$ középpontú és $\frac{2}{3}|\mathbf{c}|$ sugarú kör egyenlete. (Igazoljuk és ábrázoljuk!)

Általánosítások. a) Ha az $|AP|$ távolság háromszor, ötször, ..., n-szer akkora mint a $|BP|$ távolság, akkor is kört kapunk. Hogyan változik ekkor a kör helyzete az n függvényében?

b) A feladat ugyanígy oldható meg „térben". Ekkor a P pontok egy gömbön vannak.

c) Igazoljuk, vagy cáfoljuk meg a következő állítást: Legyen A és B két rögzített pont (a térben). Ekkor mindazon pontok halmaza, amelyekre

$$\frac{AB \text{ távolság}}{BP \text{ távolság}} = \text{állandó}$$

egy gömböt alkot. Mennyi ennek a gömbnek a sugara és hol van a középpontja?

205. Az

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bűvös négyzetekből minden bűvös négyzet előállítható. Mégpedig, ha az első mátrixot a-val, a másodikat b-vel, a harmadikat pedig c-vel szorozzuk és összeadjuk, akkor a következő bűvös négyzetet kapjuk

$$\begin{pmatrix} \overline{\underline{|a|}} & + & + \\ + & \overline{\underline{|b|}} & + \\ \overline{\underline{|c|}} & + & + \end{pmatrix},$$

ahol a kitöltetlen + helyeken a mátrixműveletekből adódó számok állnak. *Például:* ha a bűvös négyzetben $a_{11}=1$, $a_{22}=5$, $a_{31}=2$, akkor a szerkesztés a következő

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 12 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ez a szerkesztés a bűvös négyzetek **204. I.** és **II.** tulajdonságaira épül és arra az észrevételre, hogy *van olyan elemhármas, amely már meghatározza a bűvös négyzetet.*

Ha például az a_{11}, a_{22}, a_{31} elemeket megadjuk, akkor pontosan egy olyan bűvös négyzet van, amelynek a_{11}, a_{22}, a_{31} elemei a megadott számok.

A mondottak alapján, válasszuk az a_{11}, a_{22}, a_{31} elemeket nagyon egyszerűnek, például így:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & + & + \\ + & \boxed{0} & + \\ \boxed{0} & + & + \end{pmatrix};$$

ekkor könnyen belátható, hogy ha $a_{21}=x$, akkor szintén $a_{33}=x$, továbbá $a_{32}=1$ stb. A bűvös négyzet ekkor így alakul

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix},$$

és mivel a mellékátlóban csupa nulla áll, ezért a **204.** *b)* összegek mind nullák. Ennek alapján $x=-1$ és csakis ez lehet.

Ezzel megkaphatjuk az első mátrixot. A harmadik mátrix ennek tükörképe, a második pedig ennek a kettőnek és a csupa *1*-esekből álló, nyilvánvalóan bűvös négyzetnek a lineáris kombinációja

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Még be kell látni azt, hogy a $(*)$ minimális számú. Vagyis azt, hogy háromnál kevesebb mátrixból nem állítható elő minden bűvös mátrix. Ebből a célból vegyük a következő leképezést

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow a_{11}\mathbf{i}+a_{22}\mathbf{j}+a_{31}\mathbf{k},$$

vagyis minden bűvös négyzethez a fenti módon rendeljünk hozzá egy (geometriai) vektort. A mondottak alapján ez a leképezés 1-1 és művelettartó (lineárisan izomorfizmus).

Ebben a leképezésben a $(*)$ mátrixok az **i**, **j**, **k** bázis képei.

Megjegyzések. **1.** *„Van olyan elemhármas, amely már meghatározza a bűvös négyzetet"* és a **204. I.** megállapítások a lineáris algebra nyelvén pontosan azt mondják, hogy a $(**)$ leképezés 1-1 és művelettartó, vagyis lineáris izomorfizmus.

2. Az elmondottak alapján a következő mátrixhármas is lehet a bűvös négyzetek bázisa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ezzel a következő általánosítást kaphatjuk: Válasszuk a 3×3 mátrix elemeit *tetszőleges egységelemes gyűrűből* és értelmezzük a bűvös négyzetet, mint a **204.** *b)*

feltételt kielégítő mátrixot. Ekkor az eddig mondottak érvényesek maradnak nyilvánvaló, értelemszerű módosítással. Ha például a szóban forgó gyűrű az $n \times n$ mátrixok gyűrűje (például, $n=2, 3$), akkor az elmondottak eljárást adnak 6×6, 9×9 bűvös négyzetek szerkesztésére. (Ekkor nem kapunk meg minden bűvös négyzetet ezzel az eljárással. Miért?)

207. Ha $\mathbf{r}=x\cdot\mathbf{i}+y\cdot\mathbf{j}+z\cdot\mathbf{k}$ és $\mathbf{v}=y\cdot\mathbf{i}+z\cdot\mathbf{j}+x\cdot\mathbf{k}$, akkor a fenti egyenlet $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{r}|^2$ és ez $|\mathbf{r}|=|\mathbf{v}|$ miatt

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=|\mathbf{r}|\cdot|\mathbf{v}|$$

és ismeretes, hogy mindig $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}\leqq|\mathbf{r}|\cdot|\mathbf{v}|$ és egyenlőség pontosan akkor van, ha $\mathbf{r}=\pm\mathbf{v}$.

Ebből $\mathbf{r}=-\mathbf{v}$ nem lehet megoldás, mert ekkor $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=-\mathbf{r}^2$ és így $\mathbf{r}=\mathbf{v}$ az összes megoldás, vagyis

$$x=y;\quad y=z;\quad z=x.$$

Megjegyzés. Az elmondottak alapján könnyen megoldható a következő általánosabb feladat.

Legyen $\{v_i;\ i=1, 2, \ldots, n\}$ az $\{x_i;\ i=1, 2, \ldots, n\}$ változók egy permutációja. Adjuk meg az

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot v_i=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

egyenlőséget kielégítő összes $\{x_i;\ i=1, 2, \ldots, n\}$ valós szám-n-est.

301. Ez a skaláris szorzat

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\leqq|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$$

(Chauchy) egyenlőtlenségének koordinátás alakja. Egy aritmetikai bizonyítás ($n=2$ esetre):

I. $$(a_1b_1+a_2b_2)^2=a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+2a_1b_1a_2b_2$$

II. $$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)=a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2$$

és a II. és I. egyenlet különbsége *nem negatív* mivel

$$a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2=(a_1b_2-a_2b_1)^2.$$

A bizonyítás hasonlóan megy akárhány dimenzióra, mivel

$$a_i^2b_k^2+a_k^2b_i^2-2a_ib_ia_kb_k=(a_ib_k-a_kb_i)^2\quad i, k=1, 2, \ldots.$$

Megjegyzés. Ez a feladat az egyik előgyakorlat a $n>3$ dimenziós tér felé.

303. Két vektor szükséges és elegendő. Mégpedig a következők: $x_1=(1, 1, \ldots, 1)$. Ekkor $a\cdot x_1=\sum_{k=1}^{n} a_k$. Legyen $M=\sum_{k=1}^{n} a_k$ és $x_2=(1, M, M^2, M^3, \ldots, M^{n-1})$. Ekkor $a\cdot x_2=\sum_{k=1}^{n} a_kM^k$ és ebből már a meghatározható, mégpedig a következő módon:

$$(*)\qquad a_1+M(a_2+a_3M+\ldots+a_nM^{n-1})=C,$$

és ismerjük C-t. $(*)$-ból látható, hogy C-t M-mel osztva a maradék a_1. Ezután, $C_2=(1/M)\cdot(C-a_1)$ pozitív egész és

$$a_2+a_3M+\ldots+a_nM^{n-2}=C_2,$$

amiből a_2 határozható meg a fenti módon stb.

Tehát ez a feladat N E M lineáris algebrai feladat. Viszont, ha a *„pozitív"* kikötést elhagyjuk, akkor standard lineáris algebrai eszközökkel belátható, hogy *pontosan n darab x kell az a biztos felismeréséhez.*

Valóban, ha a vektorok komponensei racionális számok és azokat a racionális számtest feletti vektortér elemeinek tekintjük, akkor (például a Gram—Schmidt eljáráson keresztül) belátható, hogy *bármely* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$ $n-1$ darab vektorhoz található $\mathbf{a}$, hogy

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

vagyis az $\mathbf{a}$ a nullavektortól *nem különböztethető meg.*

404. Azoknak a [0, 1]-oszlopmátrixoknak a száma, amelyekben pontosan k darab 1 áll $\binom{n}{k}$. Ezért $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$ az *összes* [0, 1]-oszlopmátrix száma, a csupa 0 kivételével (vö. a **403.** feladattal).

405. A klubok és oszlopmátrixok között 1-1 leképezés létesíthető a következőképpen:

Minden klubhoz hozzárendeljük azt az oszlopmátrixot, amelynek a k-adik eleme 1, ha a kisváros k-adik lakosa *tagja* a klubnak és 0, ha *nem.* Ekkor a feladat alapfeltétele így írható:

$$(a_i | a_j) = t \quad \text{amikor} \quad i \neq j,$$

ahol a_i az i-edik klubhoz hozzárendelt mátrix és t a közös tagok száma.

Legyen $c = \min \{a_k^2;\ k = 1, 2, \ldots, n\}$. Ekkor c a legkisebb létszámú klub tagjainak a száma és így $t \leqq c$.

Ha a klubok száma m és a kisváros lakóinak a száma n, akkor az oszlopmátrixok száma m és minden oszlopmátrix n-elemű.

A lineáris algebra, illetve lineáris egyenletrendszerek alapvető tételeiből következik, hogy *ha* $\{a_i;\ i = 1, 2, \ldots\}$ *lineárisan független vektorok (oszlopmátrixok), akkor* $m \leqq n$.

Az elmondottak alapján, ha igazoljuk az állítást, akkor **405.** is bizonyított.

Ennek egy *indirekt bizonyításának* a vázlata: Azt állítjuk, hogy

$$\left(\sum_k a_k a_k\right)^2 = \sum_k a_k^2 a_k^2 + t \sum_{i \neq j} a_i a_j = 0,$$

és van olyan k, hogy $a_k \neq 0$. Ekkor szükségképpen $\sum_{i \neq j} a_i a_j < 0$.

a) Eset: $t < c$. Ekkor

$$0 \leqq c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = c \sum_{k=1}^{n} a_k + c \sum_{i \neq j} a_i a_j < \sum_k a_k^2 a_k^2 + t \sum_{i \neq j} a_i a_j = 0$$

és ez lehetetlen.

b) Eset: $t = c$ és van olyan k hogy $a_k^2 > c$. Ekkor is az *a)* eset egyenlőtlenségére jutunk.

c) Eset: $a_k^2 = c = t$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Ekkor $\{a_k;\ k = 1, 2, \ldots, m\}$ *nem* lineárisan független. Pontosabban, az $\{a_k;\ k = 1, 2, \ldots, m\}$ oszlopmátrixok *megegyeznek egymással* és így a klubok száma: 1.

PORONYI GÁBOR
pedagógiai munkatárs
Pécs

Egyenletek közelítő megoldása

Hat éve minden közép(fokú) iskolában van már mikroszámítógép, ám aligha túlzás azt állítani, hogy a számítógépek helyét az oktatásban ma is csak keressük. Legtöbb iskolában — az oktatásügy pénztárcájához viszonyítva — nagy értékű gépeket használnak alacsony hatékonysággal. Az előbbrelépés egyik útja, hogy minden tantárgyban meg kell keresni azokat az anyagrészeket, ahol a számítógép használata természetes. (Itt most a számítógépre nem mint oktatástechnikai eszközre, „oktatógépre" gondolok, az más kérdés!) Ha ezeket az anyagrészeket megtaláljuk, minden erőltetettség nélkül mutathatunk példát a géphasználatra, a számítógép valóban az oktatási folyamat részévé válhat. A matematika és a számítógép-alkalmazás legjobban a numerikus analízisen keresztül kapcsolódik egymáshoz. Meggyőződésem, hogy a numerikus analízis elemei a középiskolában oktathatóak, sőt ezek tanítására szükség van, hiszen

— így mód nyílik korszerűbb matematikai szemlélet kialakítására;
— a numerikus eljárások csak számítógépen valósíthatóak meg a gyakorlat szempontjából gazdaságosan, itt tehát a géphasználat teljesen természetes, sőt elkerülhetetlen;
— a tanulók meglévő ismereteire (egyenlet, egyenletrendszer megoldás, integrálás) építve lehet megmutatni, hogy a számítógépes algoritmusok esetenként jelentősen eltérnek az adott probléma „hagyományos" megoldási módjától;
— a programok készítése, futtatása során a tanulók olyan tapasztalatokat szerezhetnek a számítógép-használattal kapcsolatban (számolási pontosság, számolási hibák hatása az eredményre, a futásidő csökkentésének szükségessége stb.), amelyeket máskor is hasznosítani tudnak.

Cikkemben a középiskolában szóba jöhető témák közül csak az egyenletek közelítő megoldásával foglalkozom. Bár a tárgyalt eljárások természetesen gép- és nyelvfüggetlenek, az algoritmusokat számítógépen is megvalósítom. A közölt programok Commodore plus/4 gépre készültek, de nem használják ki e gép BASIC-jének sajátosságait (pl. DO-LOOP ciklus), így csekély változtatásokkal bármely iskolaszámítógépen futtathatóak.

Az algoritmusok lejegyzésére az úgynevezett mondatszerű leírást használom.

Miért van szükség közelítő módszerekre?

Az iskolai szóhasználat szerint az egyenletmegoldásba beleértjük az egyenletrendezést is, azaz olyan $f(x)=0$ alak előállítását, amelyből x értéke valamilyen ismert módon (pl. másodfokú egyenletnél megoldóképlettel) meghatározható. Nemegyszer az egyenletmegoldással kapcsolatos munka nagyobbik része éppen az egyenletrendezés. A továbbiakban egyenletmegoldáson azt értjük, hogyan kell meghatározni x azon értékét, amelyre $f(x)=0$, ahol $f(x)$ x-től függő tetszőleges kifejezés. A középiskolai anyagnak megfelelően csak valós változójú egyenletek valós megoldását keressük.

Az elsőfokú $ax+b=0$ és a másodfokú $ax^2+bx+c=0$ egyenlet megoldóképletét ismerjük ($a\neq 0$):

$$x=-\frac{b}{a}, \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

A harmad- és negyedfokú egyenleteknek még van megoldóképletük (bár ezek használata rendkívül kényelmetlen), a négynél magasabb fokú egyenleteknek azonban nincs. Így ezek (valamint a nem

algebrai egyenletek) megoldásához más, általában közelítő módszereket kell használni. Mivel a gyökvonás miatt a megoldóképletek is általában csak közelítő értékeket adnak, már a harmadfokú egyenleteknél is célszerűbb közelítő eljárást alkalmazni. A következőkben néhány egyenletmegoldó közelítő eljárással ismerkedünk meg.

Az egyenletek gyökeinek elhelyezkedése

A közelítő módszerek csak akkor alkalmazhatók, ha néhány dolgot már tudunk a gyökökről: ismerni kell a (valós) gyökök számát és az értelmezési tartomány olyan intervallumait, amelyek egy-egy gyököt tartalmaznak. Az ilyen intervallumok meghatározását szokás a gyökök elkülönítésének nevezni. Látni fogjuk, hogy a közelítő eljárásokat sok esetben gyorsítja, ha ismerjük a gyökök valamilyen közelítő értékét.

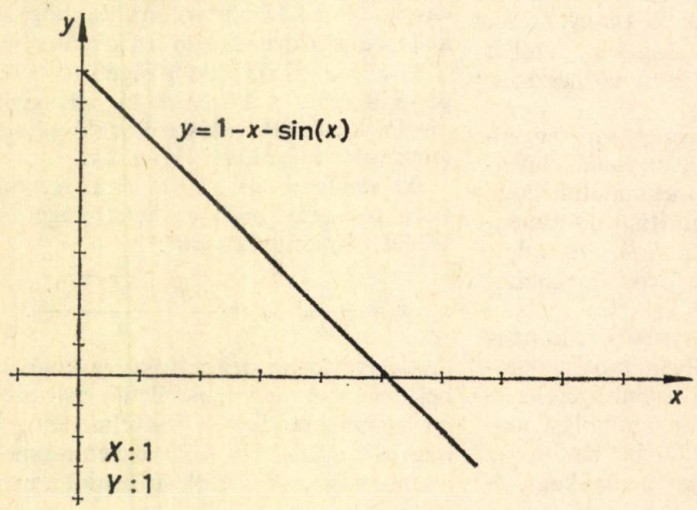
Nézzünk két módszert, amelyekkel a gyökökről ezek az előzetes ismeretek megszerezhetőek.

a) Grafikus módszer

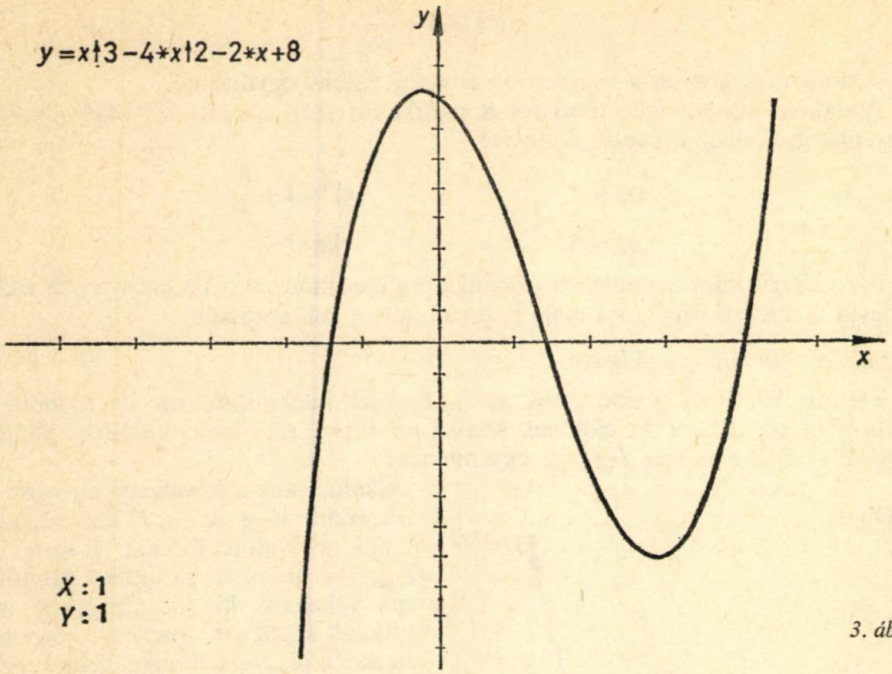
Ha az f függvény görbéjét az $[a; b]$ zárt intervallumban fel tudjuk vázolni, akkor a görbének az x tengellyel való közös pontjai adnak tájékoztatást az egyenlet $[a; b]$ intervallumbeli gyökeinek elhelyezkedéséről. Ma már minden mikrogépre van „görberajzoló" program, ez jelentős segítséget nyújthat függvények ábrázolásánál. Különösen a gyökök közelítő értékének meghatározásához jó az olyan program, amellyel az értelmezési tartomány tetszőleges intervallumán, tetszőleges „léptékkel" ábrázolható a függvény *(1., 2. ábra)*. Az *1.*, *2.* és *3. ábrán* Commodore plus/4 géppel készített függvényképeket látunk. Ezekről leolvasható az $1-x-\sin x=0$, valamint az $x^3-4x^2-2x+8=0$ egyenlet gyökeinek közelítő értéke. ($x\sim 0{,}5$, illetve $x_1\sim -1{,}5$, $x_2\sim 1{,}5$ és $x_3\sim 4$). Az ismertetett közelítő módszereket ezeknek az egyenleteknek a segítségével fogjuk a továbbiakban bemutatni.

Bizonyos esetekben (ha nem rendelkezünk megfelelő görberajzoló programmal, vagy nem akarjuk azt használni) célszerű az $f(x)$ függvényt $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ alakra hozni, ahol $f_1(x)$ és $f_2(x)$ már könnyebben vázolhatók. Ekkor a két görbe metszéspontja(i) abszcisszája kielégíti(k) az $f(x)=0$ egyenlettel ekvivalens $f_1(x)=f_2(x)$ egyenletet.

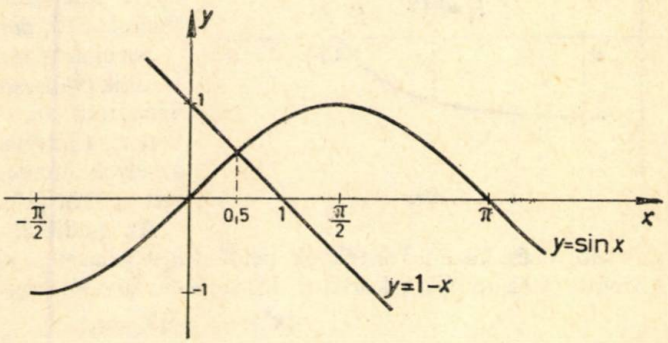
Példaként határozzuk meg grafikusan az $1-x-\sin x=0$ egyenlet gyökét. Írjuk át az egyenletet $\sin x=1-x$ alakba. Ekkor a szükséges függvényképeket „kézzel" is könnyen megrajzolhatjuk (4. ábra).



2. ábra



3. ábra



4. ábra

b) Analitikus módszer

Ha az f függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos és $f(a) \cdot f(b) < 0$ — vagyis az intervallum végpontjaiban a függvényértékek előjele ellenkező — akkor az egyenletnek az $[a, b]$ intervallumban van gyöke (Bolzano tétele). Ha a függvény még monoton is az $[a, b]$ intervallumban, akkor itt pontosan egy gyöke van.

E módszerek nyilvánvalóan akkor alkalmazhatók eredményesen, ha van valami ismeretünk arról, hogy az egyenleteknek melyik intervallumban lehet egyáltalán gyöke.

Algebrai egyenleteknél ez az intervallum viszonylag könnyen meghatározható. Bizonyítható ugyanis a következő tétel: Az

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

egyenlet minden gyökére igaz az

$$|x| \leqq 1 + \frac{|a_k|}{|a_0|}$$

egyenlőtlenség, ahol a_k a legnagyobb abszolút értékű együttható.

Példaként adjunk felső korlátot a grafikusan már vizsgált $x^3 - 4x^2 - 2x + 8 = 0$ egyenlet gyökeinek abszolút értékére!

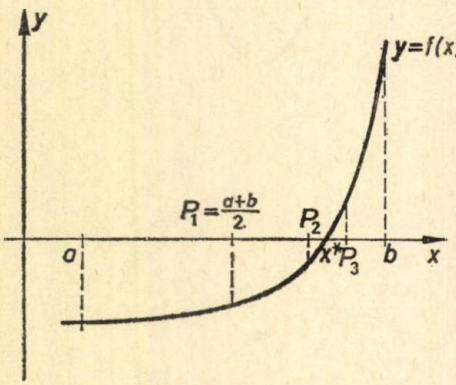
$$a_0 = 1 \qquad |x| \leqq 1 + \frac{8}{1}$$

$$a_k = 8 \qquad |x| \leqq 9.$$

Ilyen intervallum ismeretében például a grafikus módszert alkalmazva már tudjuk, hogy a megfelelő függvényt mely intervallumban kell ábrázolni.

Az intervallumfelezés módszere

Tegyük fel, hogy f folytonos az $[a; b]$ zárt intervallumban, itt monoton és $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ekkor az előbbiek szerint az $[a; b]$ zárt intervallumban pontosan egy valós gyöke van az $f(x) = 0$ egyenletnek.



5. ábra

Alkalmazzuk a következő eljárást:

Felezzük meg az $[a; b]$ intervallumot, jelöljük a kapott értéket p_1-gyel. Ha $f(p_1) = 0$, akkor megkaptuk a gyököt, ha nem, válasszuk ki $[a; p_1]$, $[p_1; b]$ intervallumok közül azt, amelynek végpontjaiban az f értékei ellenkező előjelűek. Az így nyert intervallummal ismételjük meg a fentieket *(5. ábra)*.

Az eljárás vagy véges sok lépésben befejeződik (valamelyik felezőpontban a függvényérték 0), vagy egymásba skatulyázott zárt intervallumok sorozatát nyerjük, amelyek mindegyike tartalmazza a keresett gyököt (x^*).

Az n-edik ilyen intervallumot $[a_n; b_n]$-nel jelölve és közelítő értéknek például a_n-t választva, könnyen adhatunk a kapott közelítő érték hibájára korlátot, hiszen nyilvánvaló, hogy

$$|x^* - a_n| < |b_n - a_n|,$$

A fentiek alapján megfogalmazható a pontos algoritmus:

```
Eljárás: Intervallumfelezés
  Be: a, b, ε  [f(a)·f(b)<0]
  ya:=f(a)
  Ha ya>0, akkor a és b értékét cseréld fel
  Ciklus amíg |b-a|>ε
    x:=(a+b)/2
    yb:=f(x)
    Ha yb=0, akkor Ki: x: Eljárás vége
    Ha yb<0, akkor a:=x
             különben b:=x
    Ciklus vége
    Ki: x
Eljárás vége
```

A program megírása előtt egyezzünk meg abban, hogy — most és minden következő programban — az egyenletből adódó függvényt mindig az 1000-es sorban helyezzük el, és szubrutinként használjuk. Ezért más egyenlet gyökeinek meghatározásához mindig ezt a sort kell cserélni. A fent megfogalmazott algoritmust kiegészítve a programban — hogy a közelítést nyomon követhessük — a kiszámított összes közelítő értéket is kiiratjuk.

Ezek után a program az $1-x-\sin x=0$ egyenlet megoldására intervallumfelezéssel:

```
 10 REM * EGYENLETMEGOLDAS *
    * INTERVALLUM FELEZESSEL *
 20 INPUT "AZ INTERVALLUM HATARAI"; A, B
 30 X=A: GOSUB 1000: YA=Y
 40 X=B: GOSUB 1000: YB=Y
 50 IF YA*YB>=0 OR A>=B THEN PRINT" HIBAS INTERVALLUM HATAROK!" GOTO 20
 60 INPUT "HIBAKORLAT"; EP
 70 IF YA>0 THEN S=A: A=B: B=S
 80 X=(A+B)/2: GOSUB 1000: YB=Y
 90 IF YB=0 THEN PRINT "X="; X: END
100 K=K+1: PRINT K; ".", X
110 IF YB<0 THEN A=X: ELSE B=X
120 IF ABS(B-A)>EP THEN 80
130 PRINT "X=", X
140 END
1000 Y=1-X-SIN(X)
1010 RETURN
```

Futtatáshoz az intervallum határait 0-nak és 1-nek, a hibakorlátot 10^{-6}-nak választjuk:

```
AZ INTERVALLUM HATARAI? 0, 1
HIBAKORLAT? 1E-6
 1.  .5
 2.  .75
 3.  .625
 4.  .5625
 5.  .53125
 6.  .515625
 7.  .5078125
 8.  .51171875
 9.  .509765625
10.  .510742188
11.  .511230469
12.  .510986328
13.  .510864258
14.  .510925293
15.  .510955811
16.  .510971069
17.  .510978699
18.  .510974884
19.  .510972977
20.  .51097393
X=  .51097393
```

Nézzük meg, mennyire gyorsítja az eljárást, ha a kiinduló intervallum határait a gyökhöz közelebb választjuk meg:

```
AZ INTERVALLUM HATARAI? 0.4, 0.6
HIBAKORLAT? 1E-6
 1.  .5
 2.  .55
 3.  .525
 4.  .5125
 5.  .50625
 6.  .509375
 7.  .5109375
 8.  .51171875
 9.  .511328125
10.  .511132813
11.  .511035157
12.  .510986329
13.  .510961914
14.  .510974122
15.  .510968018
16.  .51097107
17.  .510972596
18.  .510973359
X=  .510973359
```

Látjuk, hogy nem sokat nyertünk, tehát a gyököt tartalmazó intervallum határainak „gyökhöz közeli" meghatározásával nem érdemes sokat bajlódni.

Határozzuk meg az $x^3-4x^2-2x+8=0$ egyenlet gyökeit is a program segítségével. Mint a 6. ábráról leolvashatjuk, az intervallumhatárok lehetnek a -2, -1, az 1, 2 és a 3, 5 értékek.

```
1000 Y=X*X*X-4*X*X-2*X+8
AZ INTERVALLUM HATARAI? -2, -1
HIBAKORLAT? 1E-6
 1.  -1.5
 2.  -1.25
 3.  -1.375
 4.  -1.4375
 5.  -1.40625
 6.  -1.421875
 7.  -1.4140625
 8.  -1.41796875
 9.  -1.41601563
10.  -1.41503906
11.  -1.41455078
12.  -1.41430664
13.  -1.41418457
14.  -1.41424561
15.  -1.41421509
16.  -1.41419983
17.  -1.41420746
18.  -1.41421127
19.  -1.41421318
20.  -1.41421413
X=  -1.41421413

AZ INTERVALLUM HATARAI? 1, 2
HIBAKORLAT? 1E-6

 1.  1.5
 2.  1.25
 3.  1.375
 4.  1.4375
 5.  1.40625
 6.  1.421875
 7.  1.4140625
 8.  1.41796875
 9.  1.41601563
10.  1.41503906
11.  1.41455078
12.  1.41430664
13.  1.41418457
14.  1.41424561
15.  1.41421509
16.  1.41419983
17.  1.41420746
18.  1.41421127
19.  1.41421318
20.  1.41421413
X=  1.41421413

AZ INTERVALLUM HATARAI? 3, 5
HIBAKORLAT? 1E-6
X=4
```

Polinomok helyettesítési értékei

Egyenletek közelítő megoldásánál — mint ezt az intervallumfelezési eljárásnál is láttuk — gyakran van szükség arra, hogy adott függvény értékét sok különböző helyettesítési értékre kiszámítsuk. Nem közömbös tehát, hogy egy helyettesítési érték kiszámításához hány műveletet kell elvégezni. Mivel a szorzás és az osztás elvégzéséhez a számítógépnek több időre van szüksége, mint az összeadáshoz és a kivonáshoz, ezért a futási idő csökkentését a szorzások és az osztások számának csökkentésével érhetjük el.

Ha a függvény polinom és

$$f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{1}$$

alakban adott, akkor $f(x_0)$ meghatározásánál $x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^n$ értékek kiszámításához (minden új hatványérték kiszámításához az előző értéket felhasználva) $(n-1)$ db szorzásra, az $a_0x_0^n, a_1x_0^{n-1}, \ldots, a_{n-1}x_0$ értékének kiszámításához további n db, összesen tehát $(2n-1)$ darab szorzásra, végül az $f(x_0)$ meghatározásához még n darab összeadásra van szükség.

Kiemelésekkel (1) a következő formára hozható:

$$f(x) = (\ldots((a_0x+a_1)x+a_2)x+\ldots+a_{n-1})x+a_n.$$

Ekkor $f(x_0)$ kiszámításakor minden zárójelben lévő művelet elvégzése — belülről kifelé haladva — egy szorzást és egy összeadást igényel, a függvényértékek kiszámításához tehát n darab szorzás és n darab összeadás szükséges. Ez azt jelenti, hogy az időigényesebb szorzások számát majdnem felére csökkentettük. A polinomoknak ezt a — műveletigény szempontjából kedvezőbb — formáját Horner elrendezésnek nevezik.

Legyen

$$y = 3x^5 - 6{,}4x^4 + 3{,}8x^3 - 2{,}7x^2 + 6{,}3x - 87.$$

Számítsuk ki y értékét (demonstrációs célból) százszor $x_0 = 5{,}5$ értékre és mérjük a futási időt. Ismételjük meg a futtatást úgy, hogy a polinómot Horner elrendezéssel írjuk fel:

$$y = ((((3x - 6{,}4)x + 3{,}8)x - 2{,}7)x + 6{,}3)x - 87.$$

A program és outputja:

```
10 REM * POLINOM HELYETTESITESI ERTEKE
20 :
30 X=5.5
40 T1=TI
50 FOR I=1 TO 100
60 X2=X*X: X3=X2*X: X4=X3*X: X5=X4*X
65 Y=3*X5-6.4*X4+3.8*X3-2.7*X2+6.3*X-87
70 NEXT I
80 PRINT "F(5.5)="; Y
90 PRINT "FUTASI IDO";
100 PRINT USING" ###.##"; (TI-T1)/60; :
    PRINT" MP"
F(5.5)=9740.33125
FUTASI IDO 5.55 MP
```

A Horner elrendezéshez módosítsuk a 60-as sort és hagyjuk el a 65-öst:

```
60 Y=((((3*X-6.4)*X+3.8)*X-2.7)*X+6.3)*X-87
```

A futtatás eredménye:

```
F(5.5)=9740.33125
FUTASI IDO 3.75 MP
```

A futásidő számottevően csökkent, természetesen nem felére, hiszen csak a szorzások száma csökkent, az egyéb műveleteket változatlanul el kellett végezni. Alacsony fokszámú polinomoknál, vagy ha a polinom értékének kiszámítása csak kis része a programnak, a futásidő relatív csökkenése jóval kisebb lehet.

A húrmódszer

Az intervallumfelezési eljárásnál a részintervallumokat mindig két egyenlő részre osztottuk. Mivel az esetek jelentős részében a zérushely az intervallumnak ahhoz a végpontjához van közelebb, amelyikben a függvényérték abszolútértéke kisebb, általában célszerűbb a részintervallumokat a végpontokban felvett függvényértékek abszolút értékének arányában felosztani. Ez geometriailag azt jelenti, hogy a függvénynek a részintervallumok végpontjaihoz tartozó húrjainak és az abszcissza tengelynek a metszéspontját választjuk osztópontnak (innen a módszer neve).

Ha a és b az intervallum két végpontja, akkor a húr egyenlete:

(2) $$y - f(a) = m(x - a),$$

ahol

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{3}$$

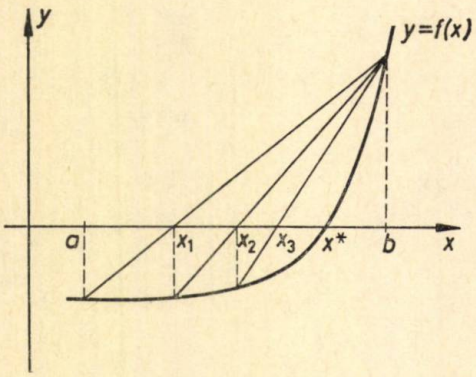
(2)-ből $y=0$ helyettesítéssel kapjuk a húr és az abszcissza tengely metszéspontját:

$$-f(a) = mx - ma, \quad \text{amiből} \quad (m \neq 0)$$

$$x = \frac{ma-f(a)}{m} = a - \frac{f(a)}{m}.$$

(3)-t behelyettesítve kapjuk, hogy

$$x = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$



6. ábra

Az intervallumfelező eljáráshoz hasonlóan, ha az így meghatározott helyen a függvényérték 0, akkor megvan a gyök, az eljárás befejeződött. Ellenkező esetben — ha még nem kerültünk a megadott hibakorláton belülre — az előjeltől függően — a-t vagy b-t a metszésponthoz tartozó x értékkel helyettesítve az eljárást folytatjuk *(6. ábra)*.

Mint a *6. ábrán* is látszik, a gyököt tartalmazó intervallum hossza ennél az eljárásnál általában nem tart nullához (pl. most mindig nagyobb az $[x^*; b]$ intervallum hosszánál). Ezért az eljárást — ha egyik osztópontban sem nulla a függvényérték — akkor fejezzük be, ha két egymás után kiszámított közelítő érték távolsága kisebb a megadott hibakorlátnál.

Az algoritmus tehát:

```
Eljárás: Húrmódszer
  Be: a, b, ε   [f(a)·f(b)<0]
  x1:=a
  x:=b
  ya:=f(a)
  yb:=f(b)
  Ha ya>0, akkor a és b, ya és yb értékét cseréld meg
  Ciklus amíg |x1-x|>ε
    x1:=x
    x:=a-ya(b-a)/(yb-ya)
    y:=f(x)
    Ha y=0, akkor Ki: x: Eljárás vége
    Ha y<0, akkor a:=x: ya:=y
            különben b:=x: yb:=y
  Ciklus vége
  Ki: x
Eljárás vége
```

Az algoritmus alapján az $1-x-\sin x=0$ egyenlet megoldása:

```
 10 REM * EGYENLETMEGOLDAS HURMODSZERREL
 30 INPUT "AZ INTERVALLUM HATARAI"; A, B
 40 X=A: GOSUB 1000: YA=Y
 50 X=B: GOSUB 1000: YB=Y
 60 IF YA*YB>=0 OR A>=B THEN PRINT
    "HIBAS INTERVALLUM HATAROK!": GOTO 30
 70 INPUT "HIBAKORLAT"; EP
 80 IF YA>0 THEN S=A: A=B: B=S: S=YA: YA=YB: YB=S
 90 X1=X: X=A-YA*(B-A)/(YB-YA): GOSUB 1000
100 IF Y=0 THEN PRINT "X="; X: END
110 K=K+1: PRINT K; ".", X
120 IF Y<0 THEN A=X: YA=Y: ELSE B=X: YB=Y
130 IF ABS(X1-X)>EP THEN 90
140 PRINT "X="; X: END
1000 Y=1-X-SIN(X)
1010 RETURN
```

Az intervallum határait ismét 0-nak és 1-nek, a hibakorlátot 10^{-6}-nak választva, a futtatási kép:

```
AZ INTERVALLUM HATARAI? 0, 1
HIBAKORLAT? 1E-6
 1. .543044125                5. .510973546
 2. .51240792                 6. .510973434
 3. .511035662               X=.510973434
 4. .510976125
```

Összehasonlítva eredményünket az intervallumfelezési eljárásával, látjuk, hogy azonos kiinduló adatok esetén most lényegesen gyorsabban jutottunk a gyökhöz, azaz ez az eljárás gyorsabban konvergál.

Az esetek jelentős részénél hasonló a helyzet, de nem mindig. Programunk segítségével határozzuk meg ismét az $x^3-4x^2-2x+8=0$ egyenlet gyökeit is. Az intervallum-végpontok és a hibakorlát legyen ugyanolyan, mint az intervallumfelezésnél. A futtatási képek:

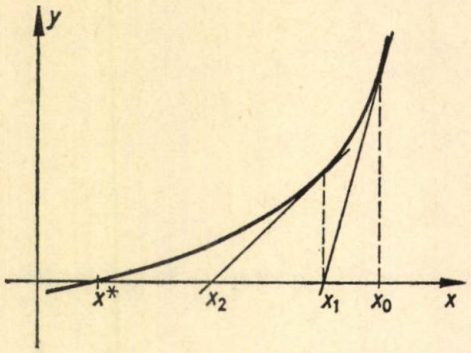
```
AZ INTERVALLUM HATARAI? -2, -1
HIBAKORLAT? 1E-6
 1. -1.29411765               7. -1.41418081
 2. -1.38269847               8. -1.41420529
 3. -1.40617712               9. -1.41421148
 4. -1.41217955              10. -1.41421304
 5. -1.41369974              11. -1.41421343
 6. -1.41408382              X=-1.41421343

AZ INTERVALLUM HATARAI? 1, 2
HIBAKORLAT? 1E-6
1. 1.42857143                3. 1.41421363
2. 1.41408451                X=1.41421356

AZ INTERVALLUM HATARAI? 3, 5
HIBAKORLAT? 1E-6
 1. 3.46666667               10. 3.99984887
 2. 3.75571051               11. 3.99994086
 3. 3.89746797               12. 3.99997686
 4. 3.95869763               13. 3.99999095
 5. 3.98364933               14. 3.99999646
 6. 3.99357249               15. 3.99999861
 7. 3.99748035               16. 3.99999946
 8. 3.99901335               X=3.99999946
 9. 3.99961381
```

Az utolsó eset kivételével eljárásunk kevesebb lépésben ért véget, mint az intervallumfelezés (azonos feltételek mellett).

A Newton-módszer (érintőmódszer)



7. ábra

Az előző két módszer az $f(x)=0$ egyenlet x^* gyöke két „elég jó" közelítésének ismeretét igényli. Vannak olyan eljárások, amelyek alkalmazásához elég a gyök egy „elegendően pontos" közelítését ismerni. Az egyik ilyen eljárást nevezik Newton-módszernek vagy érintőmódszernek.

Legyen az x^* gyök egy közelítő értéke x_0. Húzzuk meg az f függvény görbéjének x_0 abszcisszájú pontjához tartozó érintőjét. Legyen x_1 az érintő abszcissza tengellyel való metszéspontja. Az így kapott értéket közelítő értéknek tekintve ismételjük meg az előző lépést *(7. ábra)*.

Az x_0 pontban az érintő egyenlete:

$$y-f(x_0) = m(x-x_0), \tag{4}$$

ahol a meredekség az f függvény x_0 helyen vett differenciálhányadosa, azaz $m=f'(x_0)$. Ezért (4)

$$y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$$

alakba írható, amelyből $y=0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0),$$

$$-f(x_0) = f'(x_0)x-f'(x_0)x_0,$$

és ebből x meghatározható:

$$x = \frac{f'(x_0)x_0-f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad f'(x_0) \neq 0,$$

$$x = x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Az így kapott „képlettel" — x_0 értékének mindig az utoljára kiszámított közelítő értéket véve — a gyököt tetszőleges pontossággal kiszámíthatjuk. Az iterációs formulát kifejezőbb

$$x_{n+1} = x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

alakba írni, ahol x_n az előzőleg kiszámított közelítő érték. A kívánt pontosság elérését most is két egymás utáni közelítő érték eltérésének adott ε értéknél kisebbé válása jelentheti.

Mint analízisből ismert, a differenciálhányadost legegyszerűbben a derivált helyettesítési értékeként határozhatjuk meg. Ezért a programnak az $f(x)$ függvényhez hasonlóan szubrutinban a függvény deriváltját, f'-t is tartalmaznia kell.

A fentiek alapján az algoritmus megfogalmazható (az utoljára kiszámított közelítő értéket xu-val jelölve):

Eljárás: Newton-módszer
  Be: $x0, \varepsilon$
  Ciklus amíg $d>\varepsilon$
    $f1:=f(x0)$
    $f2:=f'(x0)$
    $xu:=x0-f1/f2$
    $d:=|xu-x0|$
    $x0:=xu$
  Ciklus vége
  Ki: xu
Eljárás vége

A program:

```
 10 REM * EGYENLETMEGOLDAS *
 20 REM * NEWTON-MODSZERREL *
 30 INPUT "A GYOK KOZELITO ERTEKE"; X
 40 INPUT "HIBAKORLAT"; EP
 50 GOSUB 1000
 60 GOSUB 2000
 70 XU=X-F1/F2
 75 K=K+1: PRINT;". ";XU
 80 IF ABS(X-XU)>=EP THEN X=XU: GOTO 50
 90 PRINT "X="; XU
100 END
1000 F1=1-X-SIN(X): REM * FUGGVENYERTEK *
1010 RETURN
2000 F2=-1-COS(X): REM * DIFFERENCIALHANYADOS *
2010 RETURN
```

Határozzuk meg az $1-x-\sin x=0$ egyenlet gyökét a program segítségével! Legyen az első közelítő érték 0. (Ha $f(x)=1-x-\sin x$, akkor $f'(x)=-1-\cos x$.)
A futtatási kép:

```
A GYOK KOZELITO ERTEKE? 0
HIBAKORLAT? 1E-6
1.  .5
2.  .510957953
3.  .510973429
4.  .510973429
X=.510973429
```

Határozzuk meg az $x^3-4x^2-2x+8=0$ egyenlet gyökeit is! Kiindulásként közelítsük a gyököket a -2, az 1 és az 5 értékekkel. $(f'(x)=3x^2-8x-2.)$

```
1000 F1=X*X*X-4*X*X-2*X+8: REM * FUGGVENYERTEK *
1010 RETURN
2000 F2=3*X*X-8*X-2: REM * DIFFERENCIALHANYADOS *
2010 RETURN
```

```
A GYOK KOZELITO ERTEKE? -2
HIBAKORLAT? 1E-6
1.  -1.53846154
2.  -1.42174345
3.  -1.41424389
4.  -1.41421356
5.  -1.41421356
X=-1.41421356

A GYOK KOZELITO ERTEKE? 1
HIBAKORLAT? 1E-6
1.  1.42857143
2.  1.41420591
3.  1.41421356
4.  1.41421356
X=1.41421356
```

```
A GYOK KOZELITO ERTEKE? 5
HIBAKORLAT? 1E-6
1.  4.3030303                    4.  4.00000051
2.  4.04132364                   5.  4
3.  4.00094109                   X=4
```

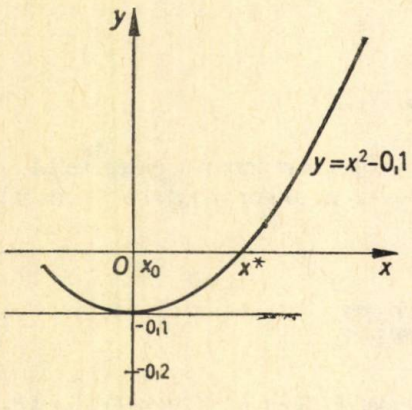
Látható, hogy nagyon „gazdaságos" módszert ismerünk meg, az előzőeknél jóval kevesebb lépésben kapjuk meg a gyököt. Az érintőmódszer tehát igen gyorsan konvergál, igazolható, hogy minden lépés kb. megkétszerezi a gyök helyes jegyeinek számát.

A gyorsaságnak — mint általában mindig — ára van. Láttuk, hogy alkalmazásához nemcsak az f függvényt, de annak deriváltját is ismerni kell. De van még ennél súlyosabb probléma is!

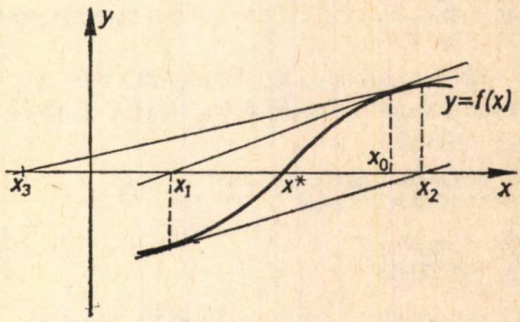
Határozzuk meg az $x^2-0{,}1=0$ egyenlet pozitív gyökét a program segítségével! ($f'(x)=2x$.) A gyök nyilvánvalóan csak kevéssé tér el 0-tól, így logikusnak tűnik a 0 közelítő értékből kiindulni. A futtatási kép:

```
A GYOK KOZELITO ERTEKE? 0
HIBAKORLAT? 1E-6
?DIVISION BY ZERO ERROR IN 70
```

Az eredmény lesújtó, de nem meglepő: a derivált helyettesítési értéke az $x_0=0$ helyen 0. Geometriailag ez azt jelenti, hogy olyan pontot választottunk ki a függvény görbéjén, ahol az érintő párhuzamos az x tengellyel *(8. ábra)*.



8. ábra



9. ábra

Az ilyen esetek kezelésére könnyen felkészíthetjük a programot:

```
55 IF F2=0 THEN PRINT "EZZEL A KEZDOERTEKKEL"
56 PRINT "A GYOK NEM HATAROZHATO MEG!": END
```

Előfordulhat azonban máskor is, hogy adott közelítő értékből kiindulva az eljárás nem konvergál, noha az érintők metszik az x tengelyt. Erre az esetre mutat egy példát a *9. ábra*.

A fenti esetekben vagy „jobb" kezdőértéket kell választani, vagy más módszert kell alkalmazni a gyök meghatározásához.

Az eljárás konvergenciájának feltétele: A Newton-módszer konvergens, ha $[x^*; x_0]$-ban f'' létezik és sem f', sem f'' nem válik zérussá, valamint $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$. Ennek a tételnek a bizonyítása túlmegy ennek a cikknek a keretein.

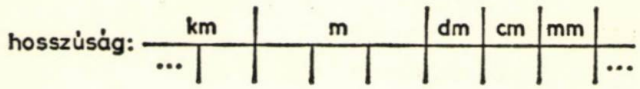
Ötletsarok

KURUCZ LÁSZLÓNÉ
tanár
Esztergom
József Attila Általános Iskola

Módszertani javaslat a mértékegységváltás tanítására

A matematika tanításának sok olyan területe van, amely örök gond a pedagógusok számára. Ezek egyike a mennyiségek mértékeinek és átváltásuknak tanítása. Nehéz feladat a mértékegységek közötti váltószámok, valamint az adott mennyiség különböző mértékekben való kifejezésének megtanítása, a mértékegység-váltás készségszintté fejlesztése.

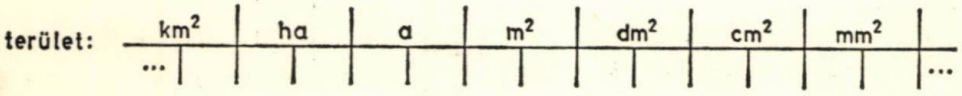
Táblázatos módszerem a gyerekeknek azokra a korábban szerzett ismereteire épít, amelyet a számok helyiérték-táblázatban történő elhelyezésénél tanultak. Csak olyan mennyiségek tanításánál célszerű alkalmazni, amelyeknél a váltószám 10 és 10 hatványa. Az általános iskolában tanítandó mennyiségek azonban — az idő s a szög kivételével — mind ilyenek.

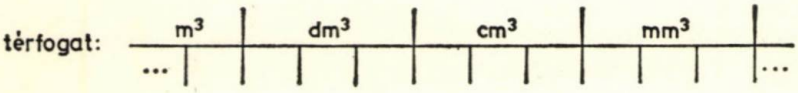


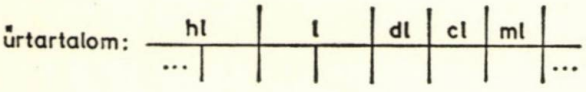
Egy mennyiség mértékegységeinek tanításánál a tapasztalati úton történő ismeretszerzést követheti a módszer alkalmazása. Különösen a vizuális típusú gyerekek jegyzik meg könnyebben a mértékek közti váltószámokat e táblázatok segítségével:

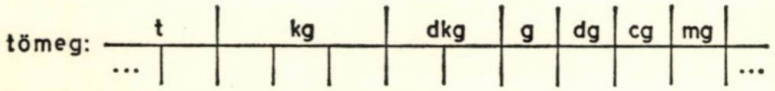
Megjegyzés. A táblázat rovatainak kialakítását a következő példa magyarázza: 1 km = 1000 m, ezért 999 m még elhelyezhető a méterek rovataiban, de 1000 m esetén már az „1" a kilométerek rovatába kerül át.

A többi táblázat hasonlóképpen készíthető el:









(* dekagram: dag az SI rendszer jelölése szerint dg: decigram, cg: centigram.)

Ezután a mértékváltással kapcsolatos különböző nehézségi fokú feladatokat a táblázatok segítségével könnyebben és kevesebb hibával oldják meg az alsó és felső tagozatos tanulók.

Néhány példán bemutatom az alkalmazás módját.

1. Alsó tagozaton:

$$25\ \text{m} = ?\ \text{cm}.$$

	m		dm	cm	
...	2	5			...

Elhelyezzük a mennyiség mérőszámát a táblázat megfelelő rovataiba:
A táblázat üresen maradt helyeire helypótló nullát írva leolvasható a megoldás:

	m		dm	cm	
...	2	5	0	0	...

$25\ \text{m} = 2500\ \text{cm}.$

A feladatmegoldás módszere fordítva is alkalmazható:

	m		dm	cm	
...	2	5	Ø	Ø	...

$2500\ \text{cm} = 25\ \text{m}.$

2. Felső tagozaton, a tizedestört megismerése után:

$$5\,\text{t}\ 127\,\text{dkg} = ?\ \text{kg}$$

	t		kg		dkg		
...	5			1	2	7	

A helypótló nullák beírása után leolvasható a megoldás:

$$5\,\text{t}\ 127\,\text{dkg} = 5001{,}27\ \text{kg}.$$

	t		kg		dkg		
...	5	0	0	1	2	7	...

3. Két összetettebb feladat:

a) $62\ \text{m}\ 65\ \text{dm}\ 108\ \text{mm} = ?\ \text{km}$

Az oszlop számjegyeit összeadva leolvasható:

$62\ \text{m}\ 65\ \text{dm}\ 108\ \text{mm} = 0{,}068608\ \text{km}.$

b) $2\ \text{hl}\ 3\ \text{l}\ 12\ \text{dl}\ 803\ \text{ml} = ?\ \text{cl}$

	km		m		dm	cm	mm
			6	2			
				6	5		
+					1	0	8
	0	0	6	8	6	0	8

Az összeadás után leolvasható a megoldás:

$2\ \text{hl}\ 3\ \text{l}\ 12\ \text{dl}\ 803\ \text{ml} = 20\,500{,}3\ \text{cl}.$

	hl		l		dl	cl	ml
	2		3				
			1		2		
+					8	0	3
	2	0	5		0	0	3

A módszer alkalmazása több azonos típusú mennyiség mértékei közti átváltás gyakoroltatásánál a legcélszerűbb, hiszen egyetlen táblázat készítésével nagyon sok, különböző nehézségű feladat oldható meg.

Tapasztalataim szerint különösen eredményes a táblázatos módszerrel való tanítás, ha sok közepes, vagy gyengébb képességű gyerek van a tanulócsoportban.

Természetesen, mint minden más tanulást segítő eszköznek, ennek használata is csak addig helyes, amíg a gyermeknek szüksége van rá, segíti a fejlődést. Amikor már enélkül is biztonságosan old meg feladatokat, akkor a táblázat elkészítése fölösleges időveszteség; el kell hagyni.